DOI: 10.25698/UGV.2018.3.6.38 УДК 550.834.3(571.1)

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ ДЛЯ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Черноскутов А.И. – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

Аннотация. В работе предлагается метод решения прямой задачи гравиметрии для сферических и эллипсоидальных плотностных моделей. Основная цель – сократить время вычислений по сравнению с методами, основанными на кубатурных формулах. Представлены численные эксперименты с использованием предложенного метода для синтетических и реальных моделей Земной коры, которые показывают качество сходимости, зависимость погрешности от разбиения и скорость проведения расчётов. Полученные результаты показывают, что метод позволяет значительно (в десятки-тысячи раз, в зависимости от размеров сетки) сократить время вычислений без увеличения погрешности. Метод может быть использован для тел произвольной геометрии, которые в достаточной степени точности могут быть аппроксимированы многогранниками.

Прямая задачи гравиметрии, сферическая плотностная модель, гравитационное поле.

ON NUMERIC SOLUTION OF FORWARD GRAVITY PROBLEM FOR ELLIPTICAL OBJECTS

Martyshko P.S., Byzov D.D., Chernoskutov A.I. – Institute of Geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

Abstract. The paper proposes a method for solving the direct gravity problem for spherical and ellipsoidal density models. The main goal is to reduce the computation time compared to methods based on cubature formulas. Numerical experiments are presented using the proposed method for synthetic and real models of the Earth's crust. Characteristics of convergence, dependence of the error on discretization, and performance of calculations are evaluated. The results show that the method allows to significantly (tens to thousand times, depending on the size of the mesh) reduce the computation time without increasing the error. The method can be applied for bodies of arbitrary geometry, that can be approximated to a sufficient degree of accuracy by polyhedra.

Forward gravity problem, spherical density model, gravity field.

Введение

Постоянно увеличивающиеся доступные вычислительные мощности позволяют решать прямые и обратные задачи геофизики на сетках большой размерности. Практически это означает возможность интерпретации геофизических данных, заданных на больших площадях земной поверхности и с меньшим шагом разбиения. При решении задач гравиметрии увеличение исследуемой площади может привести к необходимости учета сферической формы планеты с целью получения адекватной точности вычислений. «Наивный» подход к численному решению такой задачи (т. е. попытка численно интегрировать исходное выражение гравитационного поля для сферической или эллипсоидальной модели с помощью стандартных кубатурных формул) приводит к существенному увеличению времени вычислений (при сохранении требований к погрешности). Это происходит из-за изменения вычислительной сложности алгоритма с линейной на квадратичную (от числа элементов разбиения модели и числа точек вычисления поля), что является непрактичным при исследовании реальных моделей. В данной работе мы рассмотрим построение алгоритма, позволяющего уменьшить время вычислений по сравнению с «наивным» подходом на два порядка. В качестве «побочного» эффекта предложенный способ также (для ряда частных случаев) способен уменьшить погрешность счета в 10–1000 раз по сравнению с кубатурными формулами (в зависимости от размера сетки).

Постановка задачи

Определим «эллипсоидальную» трехмерную плотностную модель до глубины

H. Пусть ее «верхняя» граница S (со стороны раздела земля-воздух) – часть поверхности эллипсоида вращения (например, референц-эллипсоида Красовского), все точки, расположенные на расстоянии не более H вдоль внутренней нормали к S, включены в модель. В указанной области $D \subset R^3$ задано распределение плотности $\rho(p)$, $p \in D$.

«Вертикальная» составляющая Δg напряженности гравитационного поля, создаваемого областью D, во внешней точке $q \notin D \backslash \partial D$ определяется интегралом:

$$\Delta g(q) = -\gamma \frac{\partial}{\partial \vec{n}_q} \int_D \frac{\rho(p) dV_p}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}, \qquad (1)$$

где γ – гравитационная постоянная; dV_p – элемент объема интегрирования; $\vec{n}_q$ внешняя нормаль к S в ортогональной проекции точки q на S (т. е. в случае «сферической» модели $\vec{n}_q$ совпадает с нормалью к поверхности эллипсоида); $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ – радиус-векторы точек p и q, соответственно. Стоит отметить, что данная формула описывает проекцию полного вектора напряженности гравитационного поля на единичный вектор $\vec{n}_q$, тем самым Δg – часть полного поля в направлении $\vec{n}_q$.

Пусть «базовый» эллипсоид вращения имеет экваториальный и полярный радиусы равные a и b. Положение точки на поверхности эллипсоида вращения однозначно определяют геодезические широта $B \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и долгота $L \in (-\pi; \pi]$ (за исключением «полюсов», где долгота не определена). В качестве третьей координаты примем расстояние от точки до поверхности эллипсоида взятое со знаком «+», если точка лежит вне эллипсоида, со знаком «–», если точка лежит внутри него. Положение точки в пространстве однозначно определяется тремя величинами: (L, B, H), если положить $H > -N(1 - e^2)$.

Здесь $N = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$ – радиус кривизны первого вертикала; $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ – эксцентриситет эллипсоида. При выборе строгого неравенства в ограничении на глубину H данная тройка параметров не определяет область круга радиусом ae^2 с центром в центре эллипсоида, расположенного в «экваториальной» плоскости; если выбрать нестрогое неравенство – для внутренней области того же круга теряется однозначность. На оси вращения долгота не определена.

Построим разбиение области D на элементы $D_{i,j,k}$ таким образом, что $D = \bigcup_{i,j,k} D_{i,j,k}$; $i = 1,2,..,N_i$; $j = 1,2,..,N_j$; $k = 1,2,..,N_k$. Поле Δg в точке q от всей модели D можно записать через сумму, как и для случая «плоской» модели (Мартышко и др., 2013), но от «сфероидальных» элементов разбиения:

$$\Delta g(q) = \gamma \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} \sum_{k=1}^{N_k} \rho_{i,j,k} G_{i,j,k}(q), \qquad (2)$$

где $G_{i,j,k}(q)$ – поле в точке q с точностью до коэффициента γ области $D_{i,j,k}$ с единичной плотностью. Для вычисления $G_{i,j,k}(q)$ введем в пространстве эллипсоидальной модели прямоугольную геоцентрическую систему координат $Oxyz$: центр O поместим в центр «базового» эллипсоида, ось Oz совместим с его осью вращения и направим от «южного полюса» к «северному» (т. е. точки с $B = \pi/2$ имеют $z > 0$), ось Ox направим в точку (0, 0, 0) пересечения «экватора» и нулевого меридиана, ось Oy дополняет систему до правой. Формулы перехода от координат (L, B, H) к (x, y, z) следующие:

$$\begin{cases} x = (N + H)\cos B \cos L \\ y = (N + H)\cos B \sin L \\ z = (N(1 - e^2) + H)\sin B \end{cases}, \qquad (3)$$

при этом $$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos B \cos L \\ \cos B \sin L \\ \sin B \end{pmatrix} \qquad (4)$$

есть вектор единичной внешней нормали к эллипсоиду в точке (L, B, 0).

Интеграл (1) для поля $G_{i,j,k}(q)$, очевидно, аналитически не выражается. Численно по кубатурным формулам его посчитать также проблематично (как будет показано в дальнейшем), поскольку на границы $D_{i,j,k}$ мы не накладываем никаких дополнительных ограничений с целью сохранить возможность выбора произвольного разбиения, а с формулами численного интегрирования первого – второго порядка для достижения приемлемой точности потребуется большое число узловых точек. Поэтому мы предлагаем, следуя (Мартышко и др., 2018), вычислять интеграл (1) не от самих элементов $D_{i,j,k}$, а от близких им по форме аппроксимирующих многогранников $\hat{D}_{i,j,k}$. Построить такой многогранник можно, проведя триангуляцию $D_{i,j,k}$ в пространстве $Oxyz$. Множество всех треугольников образует множество граней $\hat{D}_{i,j,k}$, обозначим его $S\left(\hat{D}_{i,j,k}\right)$. Таким образом,

$$G_{i,j,k}(q) \approx \hat{G}_{i,j,k}(q) = -\frac{\partial}{\partial \vec{n}_q} \int\limits_{\hat{D}_{i,j,k}} \frac{dV_p}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}, \quad (5)$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки вычисления поля q в геоцентрической системе прямоугольных координат (3); $\vec{n}_q$ – внешняя нормаль к поверхности «базового» эллипсоида в ортогональной проекции точки q на нее, вычисляется по формуле (4); $\vec{r}$ – радиус-вектор точки p, по координатам которой ведется интегрирование, в том же преобразованном пространстве координат $Oxyz$.

Перейдем в (5) к интегрированию по поверхности, воспользовавшись формулой Остроградского:

$$\hat{G}_{i,j,k}(q) = \left(\vec{n}_q, \int\limits_{\hat{D}_{i,j,k}} \nabla_p \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) dV_p\right) = $$

$$= \left(\vec{n}_q, \oint\limits_{\partial\hat{D}_{i,j,k}} \frac{\vec{n}_p}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} dS\right).$$

Далее разобьем поверхностный интеграл на части по граням $\hat{D}_{i,j,k}$, принимая во внимание, что внешняя нормаль $\vec{n}_p$ в точке интегрирования постоянна для каждой грани:

$$\hat{G}_{i,j,k}(q) = \sum_{S_{i1}\in S\left(\hat{D}_{i,j,k}\right)} \left(\vec{n}_q, \vec{n}_{i1}\right) \int\limits_{S_{i1}} \frac{dS}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}, \quad (6)$$

где $\vec{n}_{i1}$ – внешняя нормаль к грани S_{i1}. Осталось записать формулу для внутреннего интеграла в (6) от треугольника S_{i1}

Обозначим: $\vec{r}_i$ (i = 1,2,3) – радиус-вектора вершин треугольника $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$; $\vec{a}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_0{}'$ – расстояние от точки q до этих вершин. Каждый из треугольников можно задать через направляющие вектора $\vec{a}_{j,i} = \vec{a}_i - \vec{a}_j = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ и определить нормаль через векторное произведение $\vec{N} = \left[\vec{a}_{i-1,i}; \vec{a}_{i,i+1}\right]$, при этом $\left|\vec{N}\right|$ равен удвоенной площади треугольника. Расстояние (со знаком) от точки наблюдения q до плоскости треугольника вычисляется через скалярное произведение $\left(\vec{a}_i; \vec{n}\right)$, где $\vec{n} = \vec{N} / \left|\vec{N}\right|$ – единичная нормаль.

Интеграл по треугольной грани S_{i1} вычисляется в явном (аналитическом) виде:

$$\int\limits_{\langle p_1,p_2,p_3\rangle} \frac{dS}{|\vec{r}-\vec{r}_0{}'|} = -\frac{\pi}{2}\left|\left(\vec{a}_1;\vec{n}\right)\right| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3}\left(\left(\vec{a}_i;\left[\vec{A}_{i-1,i};\vec{n}\right]\right)\ln\frac{\left(\vec{A}_{i-1,i};\vec{a}_i\right)+|\vec{a}_i|}{\left(\vec{A}_{i-1,i};\vec{a}_{i-1}\right)+|\vec{a}_{i-1}|} - \quad (7)$$

$$\left. - \left(\vec{a}_i;\vec{n}\right) arctg \frac{\left(\left[\vec{a}_{i-1,i};\vec{a}_i\right];\left[\vec{a}_{i,i+1};\vec{a}_i\right]\right)}{\left(\vec{a}_i;\vec{N}\right)|\vec{a}_i|}\right),$$

где $\vec{A}_{j,i} = \dfrac{\vec{a}_{j,i}}{\left|\vec{a}_{j,i}\right|}$.

Формула (7) получена авторами путем непосредственного интегрирования.

Резюмируем процесс вычисления вертикальной компоненты поля $\Delta g(q)$ от сферической модели D:

1) выбираем триангуляцию поверхности элемента разбиения $D_{i,j,k}$, таким образом аппроксимируя его многогранником $\hat{D}_{i,j,k}$, и получаем множество граней $S\left(\hat{D}_{i,j,k}\right)$, все координаты при этом – в декартовой системе $Oxyz$;

2) при помощи формул (6) и (7) считаем вертикальную компоненту поля $\hat{G}_{i,j,k}(q)$ многогранника $\hat{D}_{i,j,k}$ в точке q, вектор нормали $\vec{n}_q$ вычисляем по формуле (4);

3) принимаем $G_{i,j,k}(q) \approx \hat{G}_{i,j,k}(q)$ и, суммируя поля всех $\hat{D}_{i,j,k}$ по формуле (2), находим искомое $\Delta g(q)$.

Погрешность и сходимость предложенного метода

Перед переходом к практической задаче был проведен ряд численных экспериментов с тестовой моделью постоянной плотности и с геометрическими характеристиками одной из далее описанных реальных моделей. Проведенные тесты (Мартышко и др., 2018) показали, что для предлагаемого метода многогранников латеральное равномерное разбиение 1335 × 968 в проекции Гаусса-Крюгера позволяет достигнуть относительной погрешности равной 0,01%. Считая такое значение приемлемым, будем использовать полученный шаг разбиения для дальнейших расчетов. Сравнение предложенного метода и метода Гаусса-Лежандра позволяет подтвердить, что с уменьшением диаметра разбиения, оба метода сходятся к одному и тому же значению. Заметим, однако, что доступные авторам вычислительные ресурсы позволили уменьшать диаметр разбиения для метода Гаусса-Лежандра лишь до достижения относительной погрешности равной 0,05%. Для достижения 0,01% потребовалось бы примерно 120 ч работы программы. Предложенный же метод показал временные затраты в 143 с (на том же самом оборудовании), что можно расценивать как ускорение работы на три десятичных порядка.

Вычисление полей для реальных моделей

Для двух региональных плотностных моделей, построенных в Институте геофизики ИГФ УрО РАН в результате решения линейной обратной задачи гравиметрии по наблюденному полю с невязкой менее 1% (Дружинин и др., 2014; Martyshko et al., 2015; Мартышко и др., 2016): Тимано-Печорской плиты (793 × 1057 × 80 км с элементом разбиения 3,1 × 4,13 × 1 км) и плотностной модели Уральского региона (1336 × 969 × 80 км с элементом разбиения 1 × 1 × 1 км), получены соответствующие им сфероидальные модели. В качестве «базового» взят эллипсоид Красовского с параметрами a = 6378,245 км, b = 6356,863 км, центральные меридианы для проекции Гаусса-Крюгера проходят примерно через географические центры территорий. На верхних границах плоских моделей на равномерной сетке (256 × 256 точек поля для первой модели и 1336 × 969 точек для второй) посчитана вертикальная составляющая гравитационного поля. Визуальное представление посчитанного поля для второй модели приведено на рис. 1 (цветная вкладка).

Описанный метод был реализован с использованием технологии CUDA. Расчёты проводились на 8-ми NVIDIA GPU: 3x GeForce GTX TITAN Black, 3x GeForce GTX TITAN X, 2x Quadro M6000. Время счета поля для первой модели составило ~80 мин (разбиение «по полю» 256 × 256, разбиение модели 256 × 256 × 81), для второй – ~270 ч (разбиение «по полю» 1335 × × 968, разбиение модели 1335 × 968 × 81).

Заключение

Разработан и описан метод, позволяющий решать прямую задачу гравиметрии для тел любой геометрии, аппроксимируя их многогранниками. Показано, что предложенный алгоритм может быть эффективно (с точки зрения вычислительных ресурсов) реализован с использованием современных технологий распараллеливания вычислений, что позволяет сократить время вычислений в 10–1000 раз по сравнению со стандартными кубатурными методами и в ряде частных случаев уменьшить погрешность результата на несколько порядков.

В дальнейших наших работах предложенный способ станет основой для разработки и реализации метода решения обратной задачи гравиметрии для сферических и эллипсоидальных тел.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-05-00916 А).

Литература

Дружинин В.С., Мартышко П.С., Начапкин Н.И., Осипов В.Ю. Строение верхней части литосферы и нефтегазоносность недр Уральского региона. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН, 2014. 226 с. [http://igeoph.net/Documents/Druzh_Mart_Nach_Osip_2014.pdf].

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д. О решении обратной задачи гравиметрии на сетках большой размерности // ДАН. 2013. Т. 450. № 6. С. 702–707. [http://link.springer.com/article/10.1134%2FS1028334X13060172].

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Федорова Н.В., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г. Теория и методы комплексной интерпретации геофизических данных. Екатеринбург: УрО РАН, 2016. 94 с. [http://igeoph.net/book.pdf].

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д., Черноскутов А.И. О решении прямой задачи гравиметрии в криволинейных и декартовых координатах: эллипсоид Красовского и «плоская» модель // Физика Земли. 2018. № 4. С. 31–39. DOI: 10.1134/S0002333718040075 [https://elibrary.ru/item.asp?doi=10.1134/S0002333718040075].

Martyshko P.S., Byzov D.D., Ladovskii I.V., Tsidaev A.G. 3D density models construction method for layered media // 15th International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2015. Albena. Bulgaria, 2015. B. 2. Vol. 1. P. 425–432.
DOI: 10.5593/SGEM2015/B21/S8.053 [https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-84946544653&origin=resultslist].