УДК 550.837

ЗАДАЧА ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЗАРЯДЕ В ОДНОРОДНОМ ПРОВОДЯЩЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ВРЕМЕНИ

Шестаков А.Ф. – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

Аннотация. Рассмотрена задача о возбуждении электромагнитного поля в гармоническом режиме сосредоточенным электрическим зарядом, расположенным в однородном проводящем полупространстве с плоской границей раздела земля–воздух. Получены выражения, определяющие элементы комплексных векторных амплитуд напряженности электрического и магнитного полей в нижнем полупространстве, включая границу раздела.

Электромагнитное поле, гармонический режим, электрический заряд, сингулярный источник, аппроксимация аномалий.

THE TASK ABOUT ELECTRIC CHARGE IN THE HOMOGENEOUS CONDUCTIVE HALF-SPACE WITH HARMONIOUS DEPENDENCE ON TIME

Shestakov A.F. – Institute of Geophysics, UB of RAS, Yekaterinburg

Abstract. The task about excitement of an electromagnetic field in the harmonious mode is considered by the concentrated electric charge located in the homogeneous carrying-out half-space with flat boundary of the surface-to-air. The expressions defining elements of complex vector amplitudes of intensity electric and magnetic fields are received in the lower half-space, including its boundary.

Electromagnetic field, harmonic regime, electric charge, singular source, approximation of anomalies.

Введение

Разработка эффективных методов интерпретации трехмерных электромагнитных аномалий является одной из актуальных и трудоемких задач геофизики.

Если при интерпретации потенциальных полей накоплен богатый опыт решения широкого класса прямых и обратных задач главным образом благодаря использованию мощного аппарата теории функций комплексного переменного – ТФКП (в двухмерной постановке) или теории потенциала (в трехмерной), то даже для электромагнитного (ЭМ) поля, возбуждаемого в гармоническом режиме, элементы которого допускают описание уравнениями того же эллиптического типа, не всегда удается реализовать приемы и методы решения граничных задач, свойственные потенциальным полям.

Одним из немногих примеров подобной реализации может служить подход к решению теоретической обратной задачи (ТОЗ) для стационарного или волнового ЭМ поля (Мартышко, 1988; 1996 и др.; Шестаков, 1996а; 1996б), с использованием интегралов Стреттона-Чу, являющихся по существу аналогами интегралов типа Коши (Жданов, 1984), которые ранее с успехом применялись при разработке методов интерпретации потенциальных геофизических полей (см., например, Цирульский, 1990).

Напомним, что постановка теоретической обратной задачи (ТОЗ) восходит к работе В.К. Иванова (Иванов, 1956а), а затем развита А.В. Цирульским при разработке основ двухэтапного подхода к интерпретации гравитационых и магнитных аномалий с использованием математического аппарата ТФКП (Цирульский, 1969; 1974 и др.).

На первом этапе исследуемый элемент поля (наблюдаемые значения производных соответствующего потенциала) аппроксимируется полями сингулярных источников определенного класса и становится заданным в явном аналитическом виде всюду, вплоть до особенностей. На втором этапе решается ТОЗ нахождения аномалиеобразующих объектов по установленному таким образом функциональному виду элемента исследуемого поля и приводящая в конечном итоге к построению эквивалентных семейств решений, определяющих возможные варианты геологического строения разреза среды.

Благодаря успешному исследованию проблемы разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде (по терминологии В.К. Иванова, см. Иванов, 1956б) для ограниченных областей и контактной поверхности, этот подход успешно себя зарекомендовал при последующей разработке двухэтапных методов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий (Цирульский и др., 1980; Цирульский, 1990).

Как выяснилось, постановка ТОЗ может быть реализована и в трехмерном варианте для грави- и магниторазведки (Цирульский, Пруткин, 1981; Пруткин, Цирульский, 1984), а также с успехом распространена на геофизические поля иной природы, в частности электромагнитные.

Один из подходов базируется на интегральных преобразованиях Стреттона-Чу, с использованием которых оказалось возможным получить в явном виде уравнения теоретических обратных задач для стационарных и переменных ЭМ полей, удовлетворяющие трехмерным уравнениям Лапласа, Гельмгольца, телеграфному и диффузии, возбуждаемых в пространстве с неоднородностями по электрическим и магнитным свойствам (Мартышко, 1990; 1994; 1996 и др.). С использованием параметризации искомого решения отрезком ряда Фурье разработан алгоритм численного решения ТОЗ и были построены первые примеры эквивалентных областей для различных соотношений проводимости вмещающей среды и тела (Мартышко, Рублев, 1996б).

Последующие исследования в этом направлении связаны с получением уравнений ТОЗ с учетом границы раздела земля–воздух, разработкой соответствующих алгоритмов и построением эквивалентных семейств в зависимости от рельефа дневной поверхности, а также при различных вариантах «носителя информации», на котором задается теоретическое поле (Шестаков, 1996б; Мартышко, Рублев, 1998; 2000 и др.).

Другой подход к решению ТОЗ основан на применении математического аппарата скалярной или тензорной функций Грина, что позволило реализовать ее постановку с учетом слоистости вмещающей среды (Хачай, 1989; 1990). Это привело к созданию трехэтапного подхода к решению обратных задач переменного ЭМ поля, возбуждаемого в слоистых средах с двух- или трехмерными неоднородностями (Хачай, 1996).

На первом этапе осуществляется построение модели горизонтально-слоистой среды, вмещающей исследуемые неоднородности, по данным измерения ЭМ поля на основе оригинальной методики (Хачай, Новгородова, 1997).

На втором этапе проводится аппроксимация измеренных и обработанных данных аномальных составляющих магнитного поля суперпозицией полей от совокупности трехмерных токовых линий, приуроченных к выявленным горизонтальным неоднородностям среды на фоне нормального горизонтально-слоистого разреза. Завершением этого этапа является локализация сингулярных особенностей геоэлектрического строения в нижнем горизонтально-слоистом полупространстве (Хачай, Новгородова, 1999).

На третьем этапе предусмотрено определение электрофизических и геометрических параметров локализованных неоднородностей на основе решения теоретической обратной задачи электродинамики в рамках эквивалентных представлений (Хачай, 1991).

Следует заметить, что распространение идеи аппроксимации наблюденного поля полями сингулярных источников с последующим решением ТОЗ для ЭМ полей сопряжено бóльшей проработкой проблемы при ее практической реализации. Это связано как с чисто математическими (и последующими вычислительными) сложностями аналитического решения прямой трехмерной задачи, так и с тем, что на сегодняшний день практически не исследован класс оптимальных аппроксимационных конструкций как в двух- так и в трехмерном случаях.

Поэтому на этапе подбора не всегда поднимается вопрос о физической природе связанных с ними источников, хотя желательно, чтобы она была обусловлена особенностями аналитического продолжения внешнего поля (Жданов, 1974; Воскобойников, Шестаков, 1982; Шестаков, 1990а; 1990б). Причем, если заранее определить характер этих особенностей (связанный с «типом» особых точек), то несомненно, что процесс подбора будет более корректным и успешным.

Следует однако отметить, что проблема оптимальной реализации этапа подбора в трехмерном варианте (а для волновых полей – и в двухмерном) до сих пор остается открытой, поскольку еще не определен полный класс функций для аппроксимации элементов поля, позволяющий установить разрешимость обратной задачи в конечном виде.

В этой связи задача расширения аппроксимационного класса источников, реализующих один из этапов интерпретации, и описываемых функциями-решениями соответствующих уравнений с особенностями в нижнем полупространстве, продолжает оставаться актуальной.

В настоящей работе построено решение для трехмерного сингулярного точечного источника гармонического ЭМ поля, расположенного в проводящем полупространстве с плоской границей раздела земля–воздух.

Включение этого источника в класс аппроксимационных конструкций на этапе подбора трехмерных электромагнитных аномалий даст возможность полнее реализовать заключительный этап интерпретации – этап построения эквивалентных семейств решений, позволяющих создавать и анализировать геологические модели аномалиебразующих объектов, эквивалентных по внешнему полю.

Постановка задачи. Основные уравнения

Рассмотрим однородное изотропное проводящее полупространство, в котором под действием сторонних сил возникает локальная область сосредоточения зарядов с плотностью $q_c(t)$.

Так, например, ее возникновение может быть обусловлено сторонними силами неэлектродинамической природы (в частности, электрохимического происхождения), однако мы не будем здесь обсуждать возможные причины появления этих зарядов, поскольку это выходит за рамки настоящей статьи.

Для того чтобы отразить в уравнениях Максвелла существование сторонних зарядов от наведенных вторичных зарядов в среде с плотностью $q(t)$, зависящих (в отличие от сторонних) от возбуждаемого ЭМ поля и структурных особенностей среды, их целесообразно выделить отдельными слагаемыми, по аналогии с плотностью стороннего тока $\mathbf{j}_c$ и плотностью возникающих в среде токов проводимости $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ (см, например, Жданов, 1984). Тогда известная система уравнений макроскопической электродинамики может быть записана в следующем виде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}_c, \qquad (1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = q + q_c, \qquad (3)$$

$$\operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) = 0, \qquad (4)$$

где **E** и **H** – вектора напряженности электрического и магнитного полей; ε и μ – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости; σ – удельная электропроводность среды. Закон сохранения электрического заряда с учетом сторонних источников можно рассматривать как следствие уравнения (1):

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = \operatorname{div}(\sigma\mathbf{E}) = -\frac{\partial q}{\partial t}, \qquad (5а)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}_c) = -\frac{\partial q_c}{\partial t}. \qquad (5б)$$

Будем рассматривать модель линейной изотропной среды и сведем постановку задачи к случаю возникновения одного заряда $Q(t)$, сосредоточенного в произвольной точке полупространства M_0 (x_0, y_0, z_0), полагая, что для локальной области их распределение всегда может быть конкретизировано с заданной плотностью исходя из принципа суперпозиции ЭМ поля, возбуждаемого совокупностью зарядов.

Кроме того, область распределения может быть образована и отдельными локализованными зарядами, например, точечными заземлениями противоположного знака на границе полупространства, если задаться целью конкретизировать физическую постановку применительно к наземной электроразведке.

Однако в данной работе внимание акцентируется больше на математическом аспекте постановки, полагая, что сосредоточенный заряд выступает в качестве независимого источника возбуждения ЭМ поля и рассматривается отдельно от электродинамической системы (включающей генератор и подводящие провода), либо электрохимической системы, генерирующей сторонние токи и заряды.

С учетом этого будем считать, что источником поля является локализованный в точке заряд, плотность которого в некоторой его окрестности может быть выражена с использованием δ-функции Дирака:

$$q_c = Q(t)\cdot\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \qquad (6)$$

где $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор точки возникновения заряда; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор текущей точки пространства.

По аналогии с точечным сторонним источником возбуждения стационарного электрического поля, изменение заряда во времени определяет силу тока I, стекающего с источника в окружающую среду (см., например, Бурсиан, 1972):

$$\frac{\partial q_c}{\partial t} = \frac{dQ(t)}{dt}\cdot\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -I(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,. \qquad (7)$$

Известно, что элементы нестационарного ЭМ поля, равно как и источники его возбуждения, можно разложить на гармоники (гармонические составляющие) с использованием преобразования Фурье, что несколько упрощает задачу для точечного заряда, считая его изменяющимся во времени по гармоническому закону, например, вида exp $(-i\omega t)$, где ω – круговая частота колебаний. Тогда постановка задачи сводится к определению элементов монохроматического поля для ряда частот.

Аналогичная постановка возникает и в прямой задаче электроразведки на переменном токе при возбуждении ЭМ поля в гармоническом режиме системой заданных источников, когда искомыми (расчетными) элементами поля являются непосредственно комплексные амплитуды соответствующих величин на заданной частоте.

С учетом вышеизложенного, далее будем пользоваться преобразованной из (1)–(4) системой уравнений, записанной относительно комплексных амплитуд элементов поля, токов и зарядов, сохраняя прежние обозначения:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = (\sigma - i\omega\varepsilon)\mathbf{E} + \mathbf{j}_{\mathrm{c}} = \mathbf{j}_{\mathrm{п}} + \mathbf{j}_{\mathrm{c}}, \qquad (1')$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \qquad (2')$$

$$\mathrm{div}\,(\varepsilon\mathbf{E}) = q + q_c, \qquad (3')$$

$$\mathrm{div}\,(\mu\mathbf{H}) = 0, \qquad (4')$$

где вектор плотности полного тока $\mathbf{j}_{\mathrm{п}} = (\sigma - i\omega\varepsilon)\mathbf{E}$ включает ток смещения и определяется через напряженность электрического поля, материальные параметры среды и круговую частоту колебаний.

Хорошо известно (на чем мы здесь не останавливаемся), что элементы поля, описываемые системой уравнений (1′)–(4′), должны удовлетворять естественным граничным условиям (Тамм, 1929), а также условиям излучения Зоммерфельда в бесконечно удаленной части пространства (Тихонов, Самарский, 1972).

Известно также, что плотность свободных (наведенных) объемных зарядов в проводящей однородной среде экспоненциально уменьшается с течением времени независимо от «временного течения ЭМ процесса» (Бурсиан, 1972). Поэтому считается, что для установившегося переменного поля этой плотностью объемных зарядов можно пренебречь (Заборовский, 1960).

В случае гармонического режима, также относящегося к категории установившихся процессов (см. Тихонов, Самарский, 1972), будем полагать, что частота возбуждения поля не слишком высокая и позволяет объемным зарядам полностью релаксировать за период колебаний ЭМ поля, что свойственно реальным геологическим средам (Бурсиан, 1972).

Тогда в правой части уравнения (3′) остается лишь одно слагаемое, отвечающее за генерацию ЭМ поля, это сосредоточенный сторонний заряд, меняющийся во времени по гармоническому закону, который условно можно назвать «гармоническим монополем».

Задачей исследования является определение компонент возбуждаемого им ЭМ поля в нижнем полупространстве вплоть до границы раздела земля–воздух.

Об использовании электродинамических потенциалов

Известно, что введение электродинамических потенциалов позволяет свести систему уравнений (1–4) или (1′–4′) к дифференциальным уравнениям второго порядка относительно неизвестных скалярной и векторной функций (Тамм, 1929), однако многие авторы отдают предпочтение определение элементов векторного потенциала, минуя определение скалярного (см. например, Заборовский, 1960; Бурсиан, 1972 и др.).

Исходя из специфики нашей задачи, непосредственное определение скалярного потенциала значительно упрощает процесс решения и позволяет сравнивать низкочастотную асимптотику окончательных выражений с соответствующими решениями для стационарного поля в аналогичной постановке.

Для рассматриваемой постановки задачи будем использовать известную схему применения вектор-потенциала электрического типа **A** и полагать, что комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля определяется вихревым образом:

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}, \tag{8}$$

что приводит к очевидному соотношению, следующему из второго уравнения Максвелла:

$$\mathbf{E} = i\omega\mu\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} - \mathrm{grad}\,U, \tag{9}$$

где U – скалярный потенциал электрического поля.

Применяя операцию дивергенции к обеим частям (9), приходим к уравнению эллиптического типа относительно U:

$$\Delta U = i\omega\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} - \mathrm{div}\,\mathbf{E}. \tag{10}$$

Применяя ротор к обеим частям (9), получаем векторное уравнение относительно **A**:

$$\Delta\mathbf{A} + i\omega\mu\sigma^*\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \sigma^*\mathrm{grad}\,U - \mathbf{j}_c, \tag{11}$$

где параметр $\sigma^* = \sigma - i\omega\varepsilon$ обозначает «комплексную проводимость» среды (Жданов, 1984).

Последующее использование калибровки Лоренца для потенциалов

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \sigma^* U = 0 \tag{12}$$

позволяет свести систему (10)–(11) к двум независимым уравнениям Гельмгольца (скалярному и векторному) для дальнейшего определения полевых векторных амплитуд **E** и **H**:

$$\Delta U + k^2 U = -\mathrm{div}\,E = -\frac{1}{\sigma^*}\mathrm{div}\,\mathbf{j}_c, \tag{13}$$

$$\Delta\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mathbf{j}_c, \tag{14}$$

где $k = \sqrt{i\omega\mu\sigma^*}$ – волновое число.

В большинстве задач классической электродинамики плотность стороннего тока предполагается известной, а применительно к электроразведке определяется конкретной схемой установки, что дает возможность использовать только одно уравнение (14) для определения вектор-потенциала, а затем искомых элементов поля по (8) и (9) с использованием калибровки Лоренца.

В рассматриваемой постановке вопрос о происхождении сторонних сил и конфигурации плотности стороннего тока выходит за рамки статьи, поэтому будем просто полагать, что он обеспечивает заданный гармонический режим возбуждения поля и закон сохранения заряда.

Таким образом, основным уравнением для последующего определения векторов поля является уравнение Гельмгольца относительно скалярного потенциала, которое с использованием (5б) и (7) сводится к виду:

$$\Delta U + k^2 U = -\frac{I}{\sigma^*}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\ , \qquad (13')$$

где I – амплитудное значение силы тока растекания от гармонического монополя в окружающую среду.

Интегральные представления для потенциалов и элементов поля

В нижнем полупространстве будем U искать в виде суммы частного решения неоднородного уравнения, характеризующего «первичное» поле:

$$U_1 = \frac{I}{4\pi\sigma^*}\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}, \qquad (15)$$

вид которого выбран из физических соображений и асимптотического соответствия (при $k\to 0$) стационарному случаю, а также общего решения однородного уравнения, удовлетворяющего известным условиям излучения на ∞.

$$U_2 = \qquad (16)$$

$$= \frac{I}{4\pi\sigma^*}\int_0^\infty f(\lambda)\exp(-z\sqrt{\lambda^2-k^2})J_0(\lambda\sqrt{x^2+y^2})d\lambda,$$

где J_0 – цилиндрическая функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Из характера представления (16) можно заключить, что U_2 представляет собой потенциал отраженного поля от границы раздела земля–воздух, источники которого «рассосредоточены» по плоскости $Z = 0$ с неизвестной пока плотностью. Векторный потенциал (из физических соображений имеющий лишь одну составляющую A_z) фактически является векторным потенциалом отраженного поля. Учитывая для него калибровку Лоренца (12), находим, что A_z представи́м в следующем виде:

$$A_Z = \qquad (17)$$

$$= \frac{I}{4\pi}\int_0^\infty f(\lambda)\frac{\exp(-z\sqrt{\lambda^2-k^2})}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}J_0(\lambda\sqrt{x^2+y^2})d\lambda.$$

Для нахождения неизвестной функции $f(\lambda)$ воспользуемся граничным условием задачи с учетом пренебрежения токами смещения в воздухе:

$$E_Z\big|_{Z=0} = \left(i\omega\mu A_Z - \frac{\partial U}{\partial z}\right)_{Z=0} = 0, \qquad (18)$$

предварительно учитывая представление Зоммерфельда (Заборовский, 1960) для потенциала U_1:

$$U_1 = \frac{I}{4\pi\sigma^*}\int_0^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\times \qquad (19)$$

$$\times\exp\left[\pm(z_0-z)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_0(\lambda\sqrt{x^2+y^2})d\lambda,$$

где «+» или «–» в показателе экспоненты берутся соответственно для $z_0 < z$ и $z_0 > z$ и предполагается также, что источник находится на оси Z, направленной вертикально вниз. Выполняя дифференцирование по z, получаем функциональное уравнение для определения $f(\lambda)$:

$$i\omega\mu\frac{I}{4\pi}\int_0^\infty \frac{f(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}J_0(\lambda\sqrt{x^2+y^2})d\lambda = \qquad (20)$$

$$= \frac{I}{4\pi\sigma^*}\left(\int_0^\infty \lambda\exp(-z_0\sqrt{\lambda^2-k^2})J_0(\lambda\sqrt{x^2+y^2})d\lambda - \right.$$

$$\left. -\int_0^\infty f(\lambda)\sqrt{\lambda^2-k^2}J_0(\lambda\sqrt{x^2+y^2})d\lambda\right),$$

сводящееся к соотношению

$$i\omega\sigma^*\mu\, f(\lambda)\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} =$$

$$= \lambda\exp(-z_0\sqrt{\lambda^2-k^2}) - f(\lambda)\sqrt{\lambda^2-k^2}\ ,$$

из которого находим

$$f(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\lambda}\ \exp(-z_0\sqrt{\lambda^2-k^2}), \qquad (21)$$

а затем интегральные представления для потенциалов:

$$U_2 = \frac{I}{4\pi\sigma^*}\times \qquad (22)$$

$$\times\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\lambda}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_0(\lambda\sqrt{x^2+y^2})d\lambda,$$

$$A_Z = \frac{I}{4\pi}\times$$

$$\times\int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_0(\lambda\sqrt{x^2+y^2})d\lambda\,. \tag{23}$$

Анализируя полученные решения при $\omega \to 0$, приходим к выводу, известному из теории электроразведки на постоянном токе (см., например, Электроразведка, 1989) для случая точечного заземления в однородном проводящем полупространстве:

$$U_1 = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}}, \tag{24.1}$$

$$U_2 = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2}}, \tag{24.2}$$

т. е. электрический потенциал в нижнем полупространстве представляет собой сумму действительного источника и зеркально отраженного от границы раздела земля–воздух. При этом векторный потенциал определяется из (23) в логарифмическом виде (Краев, 1951):

$$A_Z = \frac{I}{4\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\exp[-(z+z_0)\lambda]J_0(\lambda\sqrt{x^2+y^2})d\lambda =$$

$$= \frac{I}{4\pi}\ln|z+z_0+\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2}| \tag{25}$$

и позволяет легко найти компоненты стационарного магнитного поля:

$$H_X = \frac{I}{4\pi}\frac{y}{(x^2+y^2)}\left[\frac{z+z_0}{\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2}}-1\right], \tag{26.1}$$

$$H_Y = -\frac{I}{4\pi}\frac{x}{(x^2+y^2)}\left[\frac{z+z_0}{\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2}}-1\right], \tag{26.2}$$

$$H_\varphi = \frac{I}{4\pi}\frac{1}{(x^2+y^2)}\left[\frac{z+z_0}{\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2}}-1\right], \tag{26.3}$$

причем H_φ по величине совпадает со значением поля от эквивалентного тока, текущего вдоль оси Z из $-\infty$ в точку $-z_0$, если дополнить нижнее полупространство до всего пространства с той же электропроводностью (Гуревич, 1980).

В электромагнитном варианте дело обстоит несколько иначе. Во-первых, скалярный потенциал отраженного источника имеет плотность в интегральном представлении (22) несколько отличающуюся от плотности реального источника (19), причем отличие наиболее заметно при малых значениях параметра λ. Во-вторых, это отличие (если перейти к элементам напряженности) обусловлено вторичным электрическим полем, индуцированным источниками, наведенными на границе раздела земля–воздух.

Эти различия заложены в самой природе переменного электромагнитного поля, поскольку вихревые электрическое и магнитное поля взаимно порождают друг друга (в отличие от стационарных), а наведенные источники испытывают взаимное влияние друг на друга. Поэтому метод зеркальных отражений, широко используемый в электроразведке на постоянном токе, здесь не работает.

Возвращаясь к гармоническому режиму, из (6)–(7) с учетом (22)–(23) находим интегральные представления компонент электромагнитного поля, излучаемого монополем:

$$E_X = \frac{I}{4\pi\sigma^*}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right)+\right. \tag{27.1}$$

$$\left.+\frac{x}{\rho}\int_0^\infty \sqrt{\lambda^2-k^2}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_1(\lambda\rho)d\lambda\right],$$

$$E_y = \frac{I}{4\pi\sigma^*}\left[-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right)+\right. \tag{27.2}$$

$$\left.+\frac{y}{\rho}\int_0^\infty \sqrt{\lambda^2-k^2}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_1(\lambda\rho)d\lambda\right],$$

$$E_Z = \frac{I}{4\pi\sigma^*}\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}+\right.\right. \tag{27.3}$$

$$\left.+\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\lambda}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_0(\lambda\rho)d\lambda\right)+$$

$$\left.+k^2\int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_0(\lambda\rho)d\lambda\right],$$

$$H_X = -\frac{I}{4\pi}\frac{y}{\rho}\int_0^\infty \exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_1(\lambda\rho)d\lambda, \tag{28.1}$$

$$H_Y = \frac{I}{4\pi}\frac{x}{\rho}\int_0^\infty \exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_1(\lambda\rho)d\lambda, \tag{28.2}$$

$$H_\varphi = \frac{I}{4\pi}\int_0^\infty \exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right] J_1(\lambda\rho)d\lambda, \quad (28.3)$$

где J_1 – цилиндрическая функция Бесселя I рода 1-го порядка; $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Для вычисления магнитных составляющих поля преобразуем в (28) интеграл

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right] J_1(\lambda\rho)d\lambda = \\ &= -\frac{1}{\rho}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right] J_0(\lambda\rho)\Big|_{\lambda=0}^{\infty} + \\ &+\left(-\frac{z+z_0}{\rho}\right)\int_0^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\exp\left[-(z+z_0)\times\right. \\ &\left.\times\sqrt{\lambda^2-k^2}\right] J_0(\lambda\rho)d\lambda = \\ &= \frac{1}{\rho}\exp\left[ik(z+z_0)\right] - \frac{z+z_0}{\rho}\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь для вывода результата использовано асимптотическое поведение (Никифоров, Уваров, 1984) функции J_0 при больших и малых значениях аргумента. С учетом этого,

$$H_X = -\frac{I}{4\pi}\frac{y}{\rho^2}\left\{\exp\left[ik(z+z_0)\right] - (z+z_0)\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}\right\}, \quad (30.1)$$

$$H_Y = +\frac{I}{4\pi}\frac{x}{\rho^2}\left\{\exp\left[ik(z+z_0)\right] - (z+z_0)\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}\right\}, \quad (30.2)$$

$$H_\varphi = -\frac{I}{4\pi}\frac{1}{\rho}\left\{\exp\left[ik(z+z_0)\right] - (z+z_0)\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}\right\}, \quad (30.3)$$

Полученные выражения, как легко заметить, непрерывно переходят при $k \to 0$ в известные (см. выше), соответствующие стационарному случаю.

Для определения электрических составляющих в более удобном виде преобразуем в (22) интеграл:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\lambda}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]\times \\ &\times J_0\left(\lambda\sqrt{x^2+y^2}\right)d\lambda = \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^2-k^2}{\lambda\sqrt{\lambda^2-k^2}}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]\times \\ &\times J_0\left(\lambda\sqrt{x^2+y^2}\right)d\lambda = \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]\times \\ &\times J_0(\lambda\rho)d\lambda - k^2\int_0^\infty \frac{\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]}{\lambda\sqrt{\lambda^2-k^2}} J_0(\lambda\rho)d\lambda. \end{aligned} \quad (31)$$

Первое слагаемое в правой части (31) есть не что иное, как интегральное представление Зоммерфельда для функции $\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}$ в нижнем полупространстве.

Для нахождения второго слагаемого проинтегрируем (29) по z_0 от z_0 до ∞. При этом левая часть выражения равна:

$$\begin{aligned} &\int_{z_0}^\infty dz_0\int_0^\infty \exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right] J_1(\lambda\rho)d\lambda = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right] J_1(\lambda\rho)d\lambda. \end{aligned} \quad (32.1)$$

Правая часть выражения после интегрирования преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} &\int_{z_0}^\infty \left\{\frac{1}{\rho}\exp\left[ik(z+z_0)\right] - \right. \\ &\left.-\frac{z+z_0}{\rho}\frac{\exp[ik\sqrt{\rho^2+(z+z_0)^2}\,]}{\sqrt{\rho^2+(z+z_0)^2}}\right\}dz_0 = \\ &= -\frac{\exp\left[ik(\mathrm{z}+\mathrm{z}_0)\right]}{ik\rho} + \\ &+\frac{\exp[ik\sqrt{\rho^2+(\mathrm{z}+\mathrm{z}_0)^2}\,]}{ik\rho}. \end{aligned} \quad (32.2)$$

Дальнейшее использование (31), с учетом правила дифференцирования цилиндрических функций Бесселя (Никифоров, Уваров, 1984), позволяет получить другое интегральное представление для горизонтальных компонент электромагнитного поля:

$$E_X = \frac{I}{4\pi\sigma^*}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}\right)-k^2\frac{x}{\rho}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\times$$
$$\left.\times\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_1(\lambda\rho)d\lambda\right], \qquad (33.1)$$

$$E_Y = \frac{I}{4\pi\sigma^*}\left[-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}\right)-k^2\frac{y}{\rho}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\times$$
$$\left.\times\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_1(\lambda\rho)d\lambda\right], \qquad (33.2)$$

или, после преобразования (31)–(32), освободиться от интегралов:

$$E_X = \frac{I}{4\pi\sigma^*}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}\right)-\frac{ikx}{\rho^2}\exp\left[ik(z+z_0)\right]+$$
$$\left.+\frac{ikx}{\rho^2}\exp[ik\sqrt{\rho^2+(z+z_0)^2}\,]\right], \qquad (34.1)$$

$$E_Y = \frac{I}{4\pi\sigma^*}\left[-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}\right)-\frac{iky}{\rho^2}\exp\left[ik(z+z_0)\right]+$$
$$\left.+\frac{iky}{\rho^2}\exp[ik\sqrt{\rho^2+(z+z_0)^2}\,]\right]. \qquad (34.2)$$

Для нахождения E_Z-составляющей, преобразуем в (27.3) интеграл:

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\lambda}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_0d\lambda=$$
$$=-\int_0^\infty\frac{\lambda^2-k^2}{\lambda}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_0d\lambda=$$
$$=-\int_0^\infty\lambda\exp\left[-(\mathrm{z}+\mathrm{z}_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_0(\lambda\rho)d\lambda+$$
$$+k^2\int_0^\infty\frac{1}{\lambda}\exp\left[-(\mathrm{z}+\mathrm{z}_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_0(\lambda\rho)d\lambda, \qquad (35)$$

в результате чего

$$E_Z = \frac{I}{4\pi\sigma^*}\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right)+\right.$$
$$\left.+\int_0^\infty\lambda\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_0(\lambda\rho)d\lambda\right], \qquad (36)$$

или, с учетом дифференцирования представления Зоммерфельда для функции $\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}$ в области нижнего полупространства:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\exp\left[-(z+z_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_0(\lambda\rho)d\lambda=$$
$$=-\int_0^\infty\lambda\exp\left[-(\mathrm{z}+\mathrm{z}_0)\sqrt{\lambda^2-k^2}\right]J_0(\lambda\rho)d\lambda, \qquad (37)$$

приходим к окончательному виду для E_Z-составляющей:

$$E_Z = \qquad (28)$$
$$=\frac{I}{4\pi\sigma}\left[-\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}+\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}\right)\right].$$

Анализируя полученные решения для электрических компонент электромагнитного поля, легко заметить, что они непрерывно переходят при $\omega \to 0$ в соответствующие решения для стационарного электрического поля, возбуждаемого точечным источником тока в однородном проводящем полупространстве (см., например, Электроразведка, 1989).

Решение задачи для границы раздела и обсуждение результатов

В практических целях нас будут в основном интересовать компоненты поля на поверхности Земли при произвольном расположении источника в нижнем полупространстве.

Полагая $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ и проводя аналогичные выкладки, приходим к следующему результату:

$$E_X = \frac{I}{4\pi\sigma^*}\left[-\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}+\frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}\right)-\right.$$

$$-\frac{ikx}{R^2}\exp(ikz_0)+\frac{ikx}{R^2}\exp[ik\sqrt{R^2+z_0^2}]\Bigg], \quad (39.1)$$

$$E_Y=\frac{I}{4\pi\sigma^*}\left[-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\exp(ik\,|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\,|)}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\,|}+\frac{\exp(ik\,|\,\mathbf{r}+\mathbf{r}_0\,|)}{|\,\mathbf{r}+\mathbf{r}_0\,|}\right)-\right.$$

$$-\frac{iky}{R^2}\exp(ikz_0)+\frac{iky}{R^2}\exp[ik\sqrt{R^2+z_0^2}]\Bigg], \quad (39.2)$$

$$E_Z=0, \quad (39.3)$$

$$H_X=-\frac{I}{4\pi}\frac{y}{R^2}\left[\exp(ikz_0)-z_0\frac{\exp(ik\,|\,\mathbf{r}+\mathbf{r}_0\,|)}{|\,\mathbf{r}+\mathbf{r}_0\,|}\right], (40.1)$$

$$H_Y=\ \frac{I}{4\pi}\frac{x}{R^2}\left[\exp(ikz_0)-z_0\frac{\exp(ik\,|\,\mathbf{r}+\mathbf{r}_0\,|)}{|\,\mathbf{r}+\mathbf{r}_0\,|}\right], (40.2)$$

$$H_\varphi=-\frac{I}{4\pi}\frac{1}{R}\left[\exp(ikz_0)-z_0\frac{\exp(ik\,|\,\mathbf{r}+\mathbf{r}_0\,|)}{|\,\mathbf{r}+\mathbf{r}_0\,|}\right], (40.3)$$

где $R=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)}^2$.

Таким образом, каждая компонента электромагнитного поля является функцией четырех параметров: значений координат x_0, y_0, z_0 и амплитудного значения силы тока I точечного источника, если считать известными материальные параметры вмещающей среды σ, μ, ε и круговую частоту колебаний ω.

В реальной обстановке распределение индуцированных точечных зарядов может быть таким, что излучаемое ими поле будет несинфазно. Это связано как со взаимным влиянием геоэлектрических неоднородностей, так и с тем, что фронт волны возбуждающего поля не всегда доходит до них одновременно, особенно для высоких частот. В связи с этим на этапе подбора целесообразно учитывать I как комплексную величину.

На основе полученных выражений (39) не составит труда оценить частотный диапазон, в котором можно пользоваться расчетными формулами для стационарного поля (при вычислении кажущегося сопротивления среды) при обработке и интерпретации экспериментальных данных электрозондирования на переменном токе. Для этого нужно смоделировать конкретную конфигурацию возбуждающей и приемной электродинамической систем (включая установку заземлений и токоподводящие провода от генератора переменного тока) и определить допустимую погрешность вычисления кажущегося электросопротивления по расчетным формулам для модели проводящего полупространства. На практике это позволит более адекватно изучать особенности проявления структуры среды в кривых электромагнитного дистанционного зондирования на переменном токе.

Заключение

Решение задачи об излучении элементарного точечного источника – гармонически меняющегося во времени заряда, расположенного в однородном проводящем полупространстве позволило расширить представление о возможных аппроксимационных конструкциях трехмерного переменного электромагнитного поля.

Это дает возможность на этапе подбора аномалий монохроматического поля осуществлять построение комбинации сингулярных особенностей, включающей набор таких источников, излучающих на одной и той же частоте, но с различными начальными фазами и интенсивностью.

Достаточно простой аналитический вид выражений, описывающих компоненты электромагнитного поля, и небольшое число параметров позволяет рассчитывать на то, что процесс подбора может быть не слишком трудоемким в вычислительном отношении, если конечно, распределение индуцированных зарядов (связанных с геоэлектрической неоднородностью) близко по своей структуре к монопольному характеру.

В общем случае на этапе подбора нельзя исключать возможность дипольного характера распределения зарядов, а также их суперпозицию, приводящую к аппроксимационным конструкциям линейной структуры, например – трехмерных токовых линий (в первом приближении – линейных токов). Вместе с тем, подобные конструкции описываются значительно бóльшим количеством параметров, а их аналитическое представление не всегда может быть получено в замкнутом виде.

Поэтому представляется целесообразным в дальнейшем выявить класс аппроксимационных конструкций, оптимальных для целей практического использования на этапе подбора переменных электромагнитных полей.

Работа выполнена при частичной поддержке проекта Программы фундаментальных исследований УрО РАН № 15-2-5-31.

Литература

Бурсиан В.Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Изд. 2-е, испр. и доп. Л.: Недра, 1972. 368 с.

Воскобойников Г.М., Шестаков А.Ф. Метод гасящих функций и его применение для определения особых точек геофизических полей, удовлетворяющих трехмерным уравнениям Лапласа и Гельмгольца // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. № 3. С. 62–75.

Гуревич Ю.М. Методы расчета магнитных полей токов растекания в объемных проводниках Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. 63 с.

Жданов М.С. О едином подходе к проблеме интерпретации геофизических аномалий на основе методов продолжения полей // Геология и геофизика. 1974. № 10. С. 129–137.

Жданов М.С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М.: Наука, 1984. 327 с.

Заборовский А.И. Переменные электромагнитные поля в электроразведке. М.: МГУ, 1960. 186 с.

Иванов В.К. Интегральное уравнение обратной задачи теории потенциала // Докл. АН СССР. 1956а. Т. 105. № 3. С. 400–412.

Иванов В.К. О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде // Докл. АН СССР. 1956б. Т. 106. № 4. С. 598–599.

Краев А.П. Основы геоэлектрики. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1951. Ч. I. 445 с.

Мартышко П.С. О решении обратной задачи для магнитного поля токов растекания // Методы интерпретации и моделирования геофизических полей. Свердловск: УрО РАН СССР, 1988. С. 24–26.

Мартышко П.С. Интегродифференциальные уравнения обратных задач для переменных электромагнитных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 5. С. 55–61.

Мартышко П.С. О двухэтапных методах интерпретации данных электроразведки на постоянном токе // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1994. № 9. С. 91–93.

Мартышко П.С. Обратные задачи электромагнитных геофизических полей. Екатеринбург: УрО РАН, 1996. 144 с.

Мартышко П.С., Рублев А.Л. Алгоритм и примеры решения обратной задачи для переменного электромагнитного поля // Геоэлектрические исследования контрастных по электропроводности сред: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: Наука, Урал. отд., 1996. С. 3–11.

Мартышко П.С., Рублев А.Л. О выборе носителя данных при решении обратной задачи для электромагнитного поля // Теория и практика геоэлектрических исследований: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: УрО РАН, 1998. С. 3–10.

Мартышко П.С., Рублев А.Л. Уравнения и алгоритм решения теоретической обратной задачи электроразведки с учётом границы земля-воздух // Теория и практика электромагнитных методов геофизических исследований: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. С. 3–11.

Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.

Пруткин И.Л., Цирульский А.В. О решении трехмерной обратной задачи магниторазведки // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 6. С. 79–85.

Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.-Л.: Госиздат, 1929. Т. 1. 504 с.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. 4-е, испр. М.: Наука, 1972. 736 с.

Хачай О.А. Об интерпретации двумерных переменных и трехмерных стационарных аномалий электромагнитного поля // Изв.

АН СССР. Физика Земли. 1989. № 10. С. 50–58.
Хачай О.А. О решении обратной задачи для трехмерных переменных электромагнитных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 2. С. 55–59.
Хачай О.А. К вопросу об эквивалентности и единственности результатов интерпретации переменных двумерных и трехмерных электромагнитных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. № 6. С. 50–57.
Хачай О.А. Трехэтапный метод интерпретации переменных электромагнитных полей и его практическая реализация // Электромагнитные исследования с контролируемыми источниками. С.-Петербург, 1996. С. 30–31.
Хачай О.А., Новгородова Е.Н. Опыт площадных индукционных исследований резко неоднородных геоэлектрических сред // Физика Земли. 1997. № 5. С. 60–64.
Хачай О.А., Новгородова Е.Н. Использование трехмерной методики индукционных электромагнитных исследований строения горных массивов // Физика Земли. 1999. № 6. С. 61–65.
Цирульский А.В. О единственности решения обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1969. № 6. С. 60–65.
Цирульский А.В. О решении прямой и обратной задач гравиразведки // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1974. № 7. С. 81–87.
Цирульский А.В. Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 135 с.
Цирульский А.В., Никонова Ф.И., Федорова Н.В. Метод интерпретации гравитационных и магнитных аномалий с построением эквивалентных семейств решений. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. 136 с.
Цирульский А.В., Пруткин И.Л. О решении обратной задачи гравиметрии для произвольных классов двумерных и трехмерных потенциалов. Ч. I–II. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1981. № 11. С. 45–61.
Шестаков А.Ф. Метод особых точек для интерпретации двумерных монохроматических электромагнитных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990а. № 2. С. 60–72.
Шестаков А.Ф. Двумерный электромагнитный вариант метода особых точек для слоистых сред // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990б. № 5. С. 62–69.
Шестаков А.Ф. Об уравнениях ТОЗ для стационарного электрического и магнитного полей // Теория и практика интерпретации данных электромагнитных геофизических методов: Доклады конф. Екатеринбург: Наука, Урал. отд., 1996а. С. 61–64.
Шестаков А.Ф. Уравнения ТОЗ для монохроматического ЭМ поля с учетом границы раздела двух сред // Теория и практика интерпретации данных электромагнитных геофизических методов: Доклады конф. Екатеринбург: Наука, Урал отд., 1996б. С. 65–68.
Электроразведка. Справочник геофизика. Книга 1. М.: Недра, 1989. 438 с.