УДК 550.838

УРАВНЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОРАЗВЕДКИ И АЛГОРИТМ ИХ РЕШЕНИЯ В КЛАССЕ ЗВЕЗДНЫХ ТЕЛ

Мартышко П.С., Мартышко М.П. – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

Аннотация. Выведены новые векторные уравнения трёхмерной обратной задачи магниторазведки с учётом размагничивания (для внутреннего и внешнего полей) в классе звездных тел. Выбор компактного параметрического класса позволяет использовать устойчивые алгоритмы решения этих уравнений. Появляется возможность использовать измерения в скважинах для автоматизированного решения обратной задачи. Совместное решение уравнений позволяет определить границу области и значение магнитной восприимчивости.

Обратная задача магниторазведки, методы регуляризации.

THREE DIMENSIONAL MAGNETIC INVERSE PROBLEMS EQUATIONS AND SOLVING ALGORITHM FOR STELLAR BODIES

Martyshko P.S., Martyshko M.P. – Institute of Geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

Abstract. The new 3D magnetic inverse problem equations for stellar bodies have been derived (of interior and outside fields). We take into account demagnetization factor. Due to choice of special parametric set we have suggested stable algorithm for equations solving. Based on these equations it is possible to use method which does not require trial-and-error forward modeling and allows us to construct inverse problem solutions. Using borehole data we can determine the only solution.

Magnitometry, inverse problem methods of regularization.

Постановка задачи

Пусть D – односвязная область из евклидова пространства R^3 заполнена веществом с постоянной магнитной проницаемостью μ_2 и находится в среде с магнитной проницаемостью μ_1. Пусть W – магнитный потенциал индуцирующего поля (источники которого находятся вне D), V_1 – внешний, V_2 – внутренний потенциалы области D, наведённые в поле W.

Потенциалы V_1, V_2, W – гармонические функции, т. е.

$$\Delta V_1 = 0 \text{ в } D^-,\ \ \Delta V_2 = 0 \text{ и } \Delta W = 0 \text{ в } D. \quad (1)$$

Кроме того, на границе D – поверхности S – выполняются следующие соотношения

$$V_1 = V_2. \quad (2)$$

$$\mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} - \mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = (\mu_1 - \mu_2)\frac{\partial W}{\partial n}. \quad (3)$$

Решение прямой задачи магниторазведки (для магнитного поля) сводится к нахождению потенциалов V_1 и V_2 из условий (1)–(3). Обратная задача может быть сформулирована следующим образом: по заданной функции V_1, удовлетворяющей на границе искомой области условиям (1)–(3), найти эту область. В общем случае обратная задача сводится к операторному уравнению первого рода с неявно заданным оператором. Однако для теоретической обратной задачи, когда по заданному в явном виде аномальному полю требуется найти эквивалентное семейство тел с различной магнитной проницаемостью, создающих вне их общей части это поле, такие уравнения были получены (Мартышко, 1986; Мартышко П., Мартышко М., 2014). Аналогичные задачи (с заменой магнитной проницаемости на электропроводность и магнитных потенциалов на электрические) возникают при интерпретации данных электроразведки.

Уравнения теоретической обратной задачи (ТОЗ) магниторазведки

Напомним, что обратную задачу будем называть теоретической, если функция, описывающая поле, задана в явном виде (ситуация, возникающая, например, после подбора наблюденных данных потенциалами сингулярных источников) (Мартышко, 1994а, б; Петров, Федоров, 1989).

Для функций V_1, V_2, справедливы представления (Сретенский, 1946):

$$\frac{1}{4\pi}\int_S\left[V_1(P)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{\partial V_1}{\partial n}\frac{1}{r}\right]dS=\begin{cases}V_1(P_0),\ P_0\in R^3\setminus\overline{D},\\ 0,\ P_0\in D;\end{cases}\quad(4)$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_S\left[\frac{\partial V_2}{\partial n}\frac{1}{r}-V_2(P)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right]dS=\begin{cases}V_2(P_0),\ P_0\in D,\\ 0,\ P_0\in CD;\end{cases}\quad(5)$$

где n – внешняя единичная нормаль к S;

$$P(x,y,z)\in S;\ P_0(x_0,y_0,z_0)=P_0;$$

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

В работе (Мартышко П., Мартышко М., 2014) на основе представлений (4), (5) и граничных условий (2), (3) получены уравнения для напряжённости магнитного поля $\vec{H}$:

$$\vec{H}_1(P_0)=\operatorname{grad}V_1(P_0)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}\int_S\left(\frac{\partial W}{\partial n}+\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)\operatorname{grad}\frac{1}{r}ds \text{ , т. е.}$$

$$\vec{H}_1(P_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}\int_S\left(\vec{H}_0+\vec{H}_1)(P)\cdot\vec{n}\right)\operatorname{grad}\frac{1}{r}ds,$$

$$P_0\in R^3\setminus\overline{D},\quad(6)$$

$$\vec{H}_2(P_0)=\operatorname{grad}V_2(P_0)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}\int_S\left(\frac{\partial W}{\partial n}+\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)\operatorname{grad}\frac{1}{r}ds \text{ , т. е.}$$

$$\vec{H}_2(P_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}\int_S\left(\vec{H}_0+\vec{H}_1)(P)\cdot\vec{n}\right)\operatorname{grad}\frac{1}{r}ds\ ,$$

$$P_0\in D,\quad(7)$$

векторные интегральные уравнения обратной задачи магниторазведки (для внешнего и внутреннего полей соответственно).

При заданных значениях $\mu_1 = 1$ (предположим, что вмещающая среда немагнитна) и $\mu_2 = 1 + 4\pi\kappa$ (каппа – магнитная восприимчивость) с использованием уравнений (6) или (7) можно построить эквивалентное семейство решений обратной задачи магниторазведки. Совместное решение этих уравнений позволяет определить единственное решение обратной задачи. Заметим также, что в скважинах выполняются измерения как внутреннего поля, так и магнитной восприимчивости. Это позволяет определить границу S из уравнения (7).

Перепишем уравнение (7) в виде

$$\vec{H}_2(P_0)=\frac{\kappa}{1+4\pi\kappa}\int_S\left(\vec{H}_0+\vec{H}_1)\cdot\vec{n}\right)\operatorname{grad}_p\frac{1}{r}ds.\quad(8)$$

Связь между намагниченностью и напряжённостью определяется равенством $\vec{J}=\kappa\vec{H}$, с учётом этого получаем

$$\vec{J}_2(P_0)=\frac{\kappa^2}{1+4\pi\kappa}\int_S\left(\vec{H}_0+\vec{H}_1)(P)\cdot\vec{n}\right)\operatorname{grad}_p\frac{1}{r}ds.\quad(9)$$

Соотношения (8) и (9) позволяют по граничным значениям внешнего поля вычислять намагниченность области D, либо использовать значения намагниченности и внешнего поля для определения границы S (решения обратной задачи).

Для внутреннего поля также было получено уравнение обратной задачи

$$\vec{H}_2(P_0)=\kappa\int_S\left(\vec{H}_0+\vec{H}_2)(P)\cdot\vec{n}\right)\operatorname{grad}_p\frac{1}{r}ds\ ,\quad(10)$$

Из (10) следует формула вычисления внутреннего поля через намагниченность

$$\vec{H}_2(P_0)=\int_S\left(\vec{J}_2(P)\cdot\vec{n}\right)\operatorname{grad}_p\frac{1}{r}ds$$

и формула вычисления намагниченности через её поверхностные значения

$$\vec{J}_2(P_0)=\kappa\int_S\left(\vec{J}_2(P)\cdot\vec{n}\right)\operatorname{grad}_p\frac{1}{r}ds\,.$$

Алгоритм решения уравнений ТОЗ в классе звездных тел

Для реализации алгоритма решения уравнений (6–10) нужно выбрать параметрический класс областей, в котором будем решаться обратная задача, и параметризацию границы области. В работах (Мартышко, 1983; 1986; 1994а, б; Martyshko, 1999) рассмотрен класс тел, звездных относительно некоторой внутренней точки O. Этот класс является компактом, следовательно, на нем можно построить устойчивые алгоритмы решения обратной задачи.

Построим сферическую систему координат с началом в точке «звездности». Пусть теперь $\vec{r}=\vec{r}(\theta,\phi)$ – уравнение границы S в сферических координатах, при этом θ – угол между вектором $\vec{r}$ и осью z, ϕ – угол между проекцией $\vec{r}$ на плоскость xOy и осью x. Вектор-функция $\vec{r}(\theta,\phi)$ определяется тремя скалярными функциями $x(\theta, \phi)$, $y(\theta, \phi)$, $z(\theta, \phi)$:

$$\vec{r} = \{x, y, z\} \qquad (11)$$

где

$$\begin{cases} x(\theta,\phi) = r\sin\theta\cos\phi, \\ y(\theta,\phi) = r\sin\theta\sin\phi, \\ z(\theta,\phi) = r\cos\theta, \end{cases} \qquad (12)$$

а производные $\vec{r}_\theta$, $\vec{r}_\phi$ – производными этой тройки функций x_θ, y_θ, z_θ и x_ϕ, y_ϕ, z_ϕ, соответственно, которые имеют вид:

$$\begin{cases} x_\theta(\theta,\phi) = r_\theta \sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\cos\phi, \\ y_\theta(\theta,\phi) = r_\theta \sin\theta\sin\phi + r\cos\theta\sin\phi, \\ z_\theta(\theta,\phi) = r_\theta \cos\theta - r\sin\theta; \end{cases} \qquad (13)$$

$$\begin{cases} x_\phi(\theta,\phi) = r_\phi \sin\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi, \\ y_\phi(\theta,\phi) = r_\phi \sin\theta\sin\phi + r\sin\theta\cos\phi, \\ z_\phi(\theta,\phi) = r_\phi \cos\theta. \end{cases} \qquad (14)$$

По определению векторного произведения

$$[\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi] = \left\{ \begin{vmatrix} y_\theta & z_\theta \\ y_\phi & z_\phi \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_\theta & x_\theta \\ z_\phi & x_\phi \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_\theta & y_\theta \\ x_\phi & y_\phi \end{vmatrix} \right\}, \qquad (15)$$

откуда с учетом формул (13), (14) получаем (Мартышко, 1982; Martyshko, 1999):

$$\begin{aligned} [\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi] = \{ & r \cdot r_\phi \sin\phi + r^2 \sin^2\theta \cdot \cos\phi - \\ & - r \cdot r_\phi \cos\phi \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta, \\ & - r_\phi \cdot r\cos\phi + r^2 \sin\phi \cdot \sin^2\theta + \\ & + r \cdot r_\theta \sin\theta \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta, \\ & r^2 \sin\theta \cdot \cos\theta + r \cdot r_\theta \sin^2\theta \} \end{aligned} \qquad (16)$$

$$\left| [\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi] \right| = \\ = \sqrt{\left[r^2(\theta,\phi) + r_\theta^2(\theta,\phi) \right] \sin^2\theta + r_\theta^2(\theta,\phi)}\, r(\theta,\phi). \qquad (17)$$

Ортонормальный вектор

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi]}{\left| [\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi] \right|},$$

$$dS = r(\theta,\phi) \times \\ \times \sqrt{\left[r^2(\theta,\phi) + r_\theta^2(\theta,\phi) \right] \sin^2\theta + r_\theta^2(\theta,\phi)}\, d\theta d\phi. \qquad (18)$$

Формулы (12)–(18) позволяют привести уравнения (6–10) к виду, удобному для реализации численного алгоритма решения обратной задачи. Так, уравнение (10) после подстановки под интеграл сферической замены переменных принимает вид

$$\vec{H}_2(O) = -\kappa \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\vec{H}_0 + \vec{H}_2, \vec{N})\vec{r}}{|\vec{r}|^3} d\theta d\phi, \qquad (10a)$$

где $P = O, \vec{r} - \vec{r}^0 = \vec{r}$, $\vec{N} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi$.

Соотношение (10а) – уравнение 1-го рода относительно $r(\theta, \phi)$. Функцию $r(\theta, \phi)$ можно выбирать в виде отрезка двойного ряда Фурье или ряда по сферическим функциям.

В первом случае имеем:

$$r_{n,m}(\theta,\phi) = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-m}^{m} a_{kj} \exp(i(k\theta + j\phi)) .$$

Коэффициенты ряда a_{kj} можно было бы определить, минимизируя следующий функционал:

$$f(\vec{a}) = \sum_i^M \left[V_1(x_i, y_i, z_i) - V_1^{nm}(x_i, y_i, z_i) \right]^2,$$

где точки $\{x_i, y_i, z_i\}$ принадлежат носителю информации (множеству точек, на котором задано поле), $\vec{a}$ – вектор коэффициентов функции $r_{n,m}(\theta, \phi)$, по которым осуществляется минимизация, V_1^{nm} – правая часть уравнения (10а) с заменой r на $r_{n,m}$. Однако необходимо учесть, что функция $r(\theta, \phi)$, задающая границу односвязной трехмерной области, должна обладать следующим свойством (Мартышко, 1983):

$r(0,\phi) = \mathrm{cons}\,t$, $r(\pi,\phi) = \mathrm{const}$.

Из этих условий следуют соотношения для коэффициентов a_{kj}:

$$\sum_k a_{kj} = 0, \qquad \sum_{k_1} a_{k_1 j} = 0,$$

$j \in [-m, m]$, $k, k_1 \in [-n, n]$, $k = \pm1, \pm3, \ldots$;
$k_1 = \pm2, \pm4, \ldots$

Таким образом, необходимо искать минимум функционала f при ограничениях типа равенств. Поэтому к функционалу f добавлялся функционал

$$f_1 = \sum_k P_j \left(\left| \sum_k a_{kj} \right|^2 + \left| \sum_{k_1} a_{k_1 j} \right|^2 \right),$$

где P_j – штрафные коэффициенты. Регуляризация при решении уравнения (10а) осуществляется с помощью аналога сглаживающего тихоновского регуляризатора 1-го порядка

$$\Theta(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\left|r_\theta\right|^2 + \left|r_\phi\right|^2\right)d\theta d\phi =$$

$$= 2\pi^2 \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}(k^2 + j^2)\left|a_{kj}\right|^2.$$

Таким образом, при решении уравнения (10а) минимизируется функционал

$$F = f + f_1 + \alpha\Theta,$$

где α – параметр регуляризации.

Аналогично, преобразуя поверхностный интеграл в повторный, можно переписать уравнения (6–9) и реализовать приведенный выше алгоритм решения обратной задачи в классе звездных тел для этих уравнений.

Заключение

Получены представления гармонических функций, описывающих магнитное поле (внутреннее и внешнее) намагниченного тела через граничные значения. На основе этих представлений выведены уравнения обратных задач магниторазведки с явно заданным оператором. Предложен устойчивый алгоритм решения этих уравнений в классе звездных тел. Подчеркнём, что рассматривается полная задача с учётом размагничивания, математически эквивалентная задачам электроразведки постоянным током и термометрии.

Указанное обстоятельство существенно расширяет область приложений проведённых исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 14-27-00059.

Литература

Мартышко П.С. Некоторые вопросы теории и алгоритмы решения задач метода искусственного подмагничивания. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1982. 32 с.

Мартышко П.С. О решении прямой и обратной трехмерных задач МИП в параметрических классах // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1983. № 3. С. 52–58.

Мартышко П.С. О решении обратной задачи электроразведки на постоянном токе для произвольных классов потенциалов // Изв. АН СССР, Физика Земли. 1986. № 1. С. 87–92.

Мартышко П.С. О двухэтапных методах интерпретации данных электроразведки на постоянном токе // Физика Земли. 1994а. № 9. С. 91–93.

Мартышко П.С. Определение поверхности локального трехмерного проводника // Геофизический журнал. 1994б. Т. 16. № 5. С. 27–30.

Мартышко П.С., Мартышко М.П. Уравнения трехмерных обратных задач магниторазведки (электроразведки на постоянном токе) // Уральский геофизический вестник. 2014. № 2. С. 60–62.

Петров А.А., Федоров А.Н. Интерпретация данных электроразведки постоянным током в условиях неровного рельефа // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1989. № 12. С. 84–88.

Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 318 с.

Martyshko P.S. Inverse Problems of Electromagnetic Geophysical Fields. The Netherlands: VSP, 1999. 117 pp.