

О РЕШЕНИИ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ В РАМКАХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО ПОДХОДА

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д. – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

Аннотация. Высокоэффективные алгоритмы «быстрого» решения прямой задачи гравиметрии на сетках большой размерности требуются для успешной реализации функциональных и итерационных схем решения обратных задач. В настоящей работе предложен быстрый алгоритм для вычисления гравитационного поля от модели с кусочно-постоянным распределением плотности на равномерной сетке. В отличие от существующих аналогов для работы его программной реализации требуется меньше ресурсов процессора и памяти.

Гравитационное поле, прямые задачи на сетках большой размерности, плотностные модели.

ON THE SOLUTION OF THE DIRECT GRAVIMETRY PROBLEM UNDER FINITE ELEMENT APPROACH

Martyshko P.S., Ladovsky I.V., Byzov D.D. – Institute of Geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

Abstract. Highly efficient algorithms of "fast" solution of direct gravity problem on large grids are required for the successful implementation of functional and iterative schemes for solving inverse problems. In this paper, we propose a fast algorithm to calculate the gravitational field of a model with piecewise-constant density distribution on a uniform grid. In contrast to existing analogs, its software implementation is working with less consumption of CPU resources and memory.

Gravitational field, direct gravity problem on large grids, density models.

Введение

Процесс построения плотностных моделей по аномалиям гравитационного поля сводится к решению прямых и обратных задач гравиметрии. Высокоэффективные алгоритмы «быстрого» решения прямой задачи гравиметрии на сетках большой размерности требуются для успешной реализации функциональных и итерационных схем решения обратных задач.

Прямая задача гравиметрии для сеточной функции плотности (вычисление значений поля по заданному распределению плотности)

Введём правую декартову прямоугольную систему координат. Пусть область D , заполненная массами с плотностью $\rho(x, y, z)$, представляет собой прямоугольный параллелепипед:

$$D = [x_{\min}; x_{\max}] \times [y_{\min}; y_{\max}] \times [z_{\min}; z_{\max}].$$

Точка $\vec{r} = (x, y, z) \in D$; $\vec{q} = (\xi, \eta, \zeta) \notin D$ – точка, в которой вычисляется поле $R = |\vec{r} - \vec{q}|$.

Вертикальная компонента гравитационного поля в точке \vec{q} вычисляется по фор-

муле (γ – гравитационная постоянная; S – линейный оператор):

$$g(\vec{q}) = S\rho = \gamma \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_D \frac{\rho(\vec{r})}{R} dx dy dz. \quad (1)$$

Воспользуемся грид-аппроксимацией функции $\rho(x, y, z)$ плотностного параллелепипеда. На трехмерной сетке $\{x_i, y_j, z_k\}$ ($i \in \overline{0, N_x}; j \in \overline{0, N_y}; k \in \overline{0, N_z}, x_i < x_{i+1}, y_j < y_{j+1}, z_k < z_{k+1}, x_0 = x_{\min}, x_{N_x} = x_{\max}, y_0 = y_{\min}, y_{N_y} = y_{\max}, z_0 = z_{\min}, z_{N_z} = z_{\max}$) построим элементы $D_{i,j}^k$

$$D = \bigcup_{i,j,k} D_{i,j}^k;$$

$$i \in \overline{0, N_x - 1}; j \in \overline{0, N_y - 1}; k \in \overline{0, N_z - 1};$$

$$D_{i,j}^k = [x_i; x_{i+1}] \times [y_j; y_{j+1}] \times [z_k; z_{k+1}]$$

так, чтобы в пределах каждого из них плотность была постоянной:

$$\rho(x, y, z) = \rho_{i,j}^k, (x, y, z) \in D_{i,j}^k.$$

С учетом (2), интеграл (1) заменяется суммой $N = N_x N_y N_z$ кубатурных элементов с постоянной плотностью:

$$g(\vec{q}) = -\gamma \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \rho_{i,j}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{1}{R} \Big|_{z_k}^{z_{k+1}} dx dy. \quad (3)$$

Для того чтобы упростить вычисление вертикальной компоненты гравитационного поля, мы выполнили следующие преобразования формулы (3). Обозначим через R_k расстояние от точки наблюдения (ξ, η, ζ) до переменной точки интегрирования (x, y, z_k) на глубине z_k :

$$R_k = R \Big|_{z=z_k} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z_k)^2}.$$

Объединяя в (3) слагаемые с одинаковыми индексами k обратных расстояний, получаем:

$$g(\vec{q}) = \gamma \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \Delta \rho_{i,j}^k S_{i,j}^k, \quad (4)$$

где $\Delta \rho_{i,j}^k$ – поэлементная разность плотностей k и $k-1$ горизонтальных слоев:

$$\Delta \rho_{i,j}^k = \rho_{i,j}^k - \rho_{i,j}^{k-1}, \quad (k \in \overline{1, N_z-1}) \quad \text{и}$$

$\Delta \rho_{i,j}^0 = \rho_{i,j}^0, \Delta \rho_{i,j}^{N_z} = -\rho_{i,j}^{N_z-1}$; $S_{i,j}^k$ – потенциал горизонтальной грани ячейки (i, j, k) или $(i, j, k-1)$ на глубине z_k с единичной плотностью (Гравиразведка..., 1990; Старостенко, 1978):

$$S_{i,j}^k(\xi, \eta, \zeta) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{1}{R_k} dx dy =$$

$$= ((x - \xi) \ln(y - \eta + R_k) + (y - \eta) \times$$

$$\times \ln(x - \xi + R_k) - (z_k - \zeta) \times$$

$$\times \arctg \left(\frac{(x - \xi)(y - \eta)}{(z_k - \zeta) R_k} \right) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \Big|_{y_j}^{y_{j+1}}. \quad (5)$$

Представление решения в форме (4)–(5) дает возможность оптимизировать алгоритм вычислений поля для слоя, расположенного между произвольными отметками глубин.

Быстрый алгоритм решения прямой задачи гравиметрии для грид-модели

Формулу (3) запишем в виде:

$$g(\vec{q}) = \gamma \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \rho_{i,j}^k G_{i,j}^k(\vec{q}), \quad (6)$$

где $G_{i,j}^k(\vec{q})$ – поле в точке \vec{q} с точностью до коэффициента γ параллелепипеда $D_{i,j}^k$ с

единичной плотностью, которое вычисляется по формуле (Гравиразведка..., 1990) (подстановка производится в \vec{r}):

$$G_{i,j}^k(\vec{q}) = -v(\vec{r} - \vec{q}) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} \Big|_{z_k}^{z_{k+1}}, \quad (7)$$

$$v(\vec{a}) = a_x \ln(a_y + |\vec{a}|) + a_y \ln(a_x + |\vec{a}|) -$$

$$- a_z \arctg \left(\frac{a_x a_y}{a_z |\vec{a}|} \right)$$

Обозначим $\vec{r}_{i,j}^k = (x_i, y_j, z_k)$ и раскроем в (6) $G_{i,j}^k(\vec{q})$ по формуле (7):

$$g(\vec{q}) = -\gamma \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \rho_{i,j}^k (v(\vec{r}_{i+1,j+1}^{k+1} - \vec{q}) -$$

$$- v(\vec{r}_{i,j+1}^{k+1} - \vec{q}) - v(\vec{r}_{i+1,j}^{k+1} - \vec{q}) + v(\vec{r}_{i,j}^{k+1} - \vec{q}) -$$

$$- v(\vec{r}_{i+1,j+1}^k - \vec{q}) + v(\vec{r}_{i,j+1}^k - \vec{q}) + v(\vec{r}_{i+1,j}^k - \vec{q}) -$$

$$- v(\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q})). \quad (8)$$

Теперь объединим слагаемые с одинаковыми индексами при $\vec{r}_{i,j}^k$:

$$g(\vec{q}) = -\gamma \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} v(\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q}) (\rho_{i-1,j-1}^{k-1} - \rho_{i-1,j}^{k-1} -$$

$$- \rho_{i,j-1}^{k-1} + \rho_{i,j}^{k-1} - \rho_{i-1,j-1}^k + \rho_{i-1,j}^k + \rho_{i,j-1}^k - \rho_{i,j}^k) =$$

$$= \gamma \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \bar{\rho}_{i,j}^k v(\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q}), \quad (9)$$

считаем, что $\rho_{i,j}^k = 0$, если $i = -1 \vee i = N_x \vee j = -1 \vee j = N_y \vee k = -1 \vee k = N_z$.

При использовании формулы (8) необходимо $8N$ раз вычислить значение функции v , при использовании формулы (9) – только $(N_x + 1)(N_y + 1)(N_z + 1)$ раз, что дает почти восьмикратное уменьшение времени счета для достаточно больших N .

Пусть $D_{i,j}^k$ – равновеликие параллелепипеды, т. е. $x_i = x_0 + i\Delta x, y_i = y_0 + j\Delta y, z_k = z_0 + k\Delta z, \Delta x > 0, \Delta y > 0, \Delta z > 0$. Выпишем формулу для вычисления множества \vec{T} значений g в точках множества $\vec{\tau}$ в узлах равномерной прямоугольной двумерной сетки, ориентированной аналогично D , расположенной в плоскости, параллельной грани D , с расстояниями между узлами по двум измерениям Δx и Δy .

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_m)_{m=0}^{M-1}, \quad \vec{q}_m = (\xi_{i1}, \eta_{j1}, \zeta), \quad \xi_{i1} = \xi_0 + i_1 \Delta x,$$

$$\eta_{j1} = \overline{\eta_0 + j_1 \Delta y}, \zeta \notin (z_{\min}; z_{\max}), i_1 \in \overline{0, M_x - 1}, j_1 \in \overline{0, M_y - 1}, m = i_1 + M_x j_1, M = M_x M_y.$$

$$\overset{i}{T} = \left(g \left(\overset{r}{q}_m \right) \right)_{m=0}^{M-1} = \gamma \left(\sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \rho_{i,j}^k G_{i,j}^k \left(\overset{r}{q}_m \right) \right)_{m=0}^{M-1}. \quad (10)$$

Для расчета $\overset{i}{T}$ по формуле (10) требуется $8MN$ раз вычислить значение v . Применим оптимизацию (9):

$$\overset{r}{T} = \gamma \left(\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_z} \overline{\rho}_{i,j}^k v \left(\overset{r}{r}_{i,j}^k - \overset{r}{q}_m \right) \right)_{m=0}^{M-1}. \quad (11)$$

По данной формуле v нужно вычислять уже $M(N_x + 1)(N_y + 1)(N_z + 1)$ раз. Однако при указанном $\overset{r}{T}$ среди множества векторов $\overset{r}{r}_{i,j}^k - \overset{r}{q}_m$ есть большое количество совпадений, для которых v можно считать один раз: $\overset{r}{r}_{i,j}^k - \overset{r}{q}_m = (x_0 + i\Delta x - (\xi_0 + i_1\Delta x), y_0 + j\Delta y - (\eta_0 + j_1\Delta y), z_k - \zeta) = (x_0 - \xi_0 + (i - i_1)\Delta x, y_0 - \eta_0 + (j - j_1)\Delta y, z_k - \zeta)$.

Если ввести новые индексы $i_2 = i - i_1, i_2 \in \overline{1 - M_x, N_x}, j_2 = j - j_1, j_2 \in \overline{1 - M_y, N_y}$, и обозначить $v_{i_2, j_2}^k = v(x_0 - \xi_0 + i_2\Delta x, y_0 - \eta_0 + j_2\Delta y, z_k - \zeta)$, то (11) можно переписать в виде:

$$\overset{r}{T} = \gamma \sum_{k=0}^{N_z} \left(\sum_{i_2=-i_1}^{N_x-i_1} \sum_{j_2=-j_1}^{N_y-j_1} \overline{\rho}_{i_2, j_2}^k v_{i_2, j_2}^k \right)_{m=0}^{M-1}. \quad (12)$$

Таким образом, v необходимо вычислять лишь в $(N_x + M_x)(N_y + M_y)(N_z + 1)$ точках, что на два порядка меньше, чем по формулам (10) или (11). Следует отметить, что возможна программная реализация (12), при которой не нужно хранить множество

$$\left\{ v_{i_2, j_2}^k \mid i_2 \in \overline{1 - M_x, N_x}, j_2 \in \overline{1 - M_y, N_y}, k \in \overline{0, N_z} \right\},$$

если использовать его элементы в соответствующих слагаемых суммы по мере вычисления. Это экономит память и никак не сказывается на производительности.

Предложенный способ решения прямой задачи по сравнению с приведенным в работе (Петровский и др., 2007) (для параллелепипеда) обладает двумя преимуществами: 1) не требуется симметрия множества $\overset{r}{T}$ относительно разбиения D (т. е. не требуется условий $x_0 - \xi_0 = \frac{\Delta x}{2} l_x, y_0 - \eta_0 = \frac{\Delta y}{2} l_y, l_x \in Z, l_y \in Z, N_x = M_x, N_y = M_y$); 2) (12) даже в теории почти в два раза быстрее (как показывает практика, чем больше N , тем быстрее), т. к. в (Петровский и др., 2007) на «шаге 1» вычисляется множество $\left\{ G_{0,0}^k(\xi_{i_1}, \eta_{j_1}, \zeta) \mid i_1 \in \overline{0, N_x - 1}, j_1 \in \overline{0, N_y - 1}, k \in \overline{0, N_z - 1} \right\}$ (при указанных в пункте 1 условиях), это требует $8N_x N_y N_z$ вычислений значений v , тогда как в (12) при тех же условиях – только $4N_x N_y (N_z + 1)$.

Для оценки ускорения расчетов по формуле (12) по сравнению с формулой (10) проведена серия вычислений поля от трехмерной плотностной грид-модели с различным числом элементов ее разбиения и детализацией сетки поля. Параметры разбиений и время счета приведены в таблице.

Вычисления проводились на одном ядре процессора Intel Xeon E5-2620 с тактовой частотой 2,5 ГГц.

На рис. 1 и 2 представлены соответствующие графики.

Таблица. Зависимость времени счета от параметров разбиения модели и сетки вычисления поля

$N_x = M_x$	$N_y = M_y$	N_z	$N = N_x * N_y * N_z$	Время счета по формуле (10), с	Время счета по формуле (12), с
50	50	50	125000	227	10
75	75	75	421875	1725	36
100	100	100	1000000	7269	84
125	125	125	1953125	22183	165
150	150	150	3375000	55197	284
175	175	175	5359375	119304	451
200	200	200	8000000	232602	673
250	250	250	15625000	709844	1313

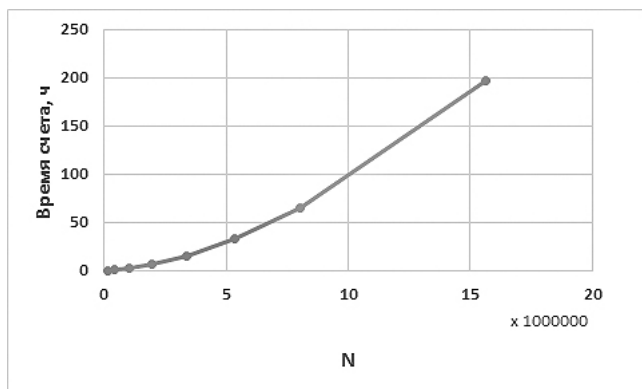


Рис. 1. Зависимость времени счета поля по формуле (10) от числа элементов разбиения модели

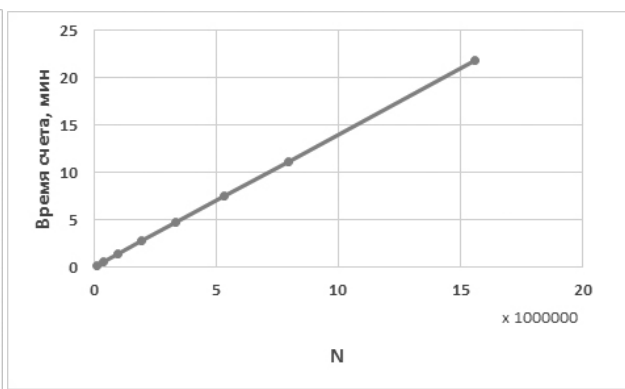


Рис. 2. Зависимость времени счета поля по формуле (12) от числа элементов разбиения модели

Заключение

Разработан и программно реализован быстрый алгоритм для вычисления гравитационного поля от модели с кусочно-постоянным распределением плотности на равномерной сетке, который выгодно отличается от существующих аналогов меньшим расходом ресурсов процессора и памяти. Повышение быстродействия стало возможным благодаря однократному вычислению значений первообразной (в интегральном представлении гравитационного поля) от одинаковых аргументов (многократно повторяющихся ввиду регулярности геометрии распределения точек счета поля и плотности в модели). Алгоритм можно использовать для интерпретации наблюденных данных в интерактивном режиме, а также как важный блок в алгоритмах автоматизированной интерпретации.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 14-27-00059.

Литература

- Гравirazведка. Справочник геофизика / Под ред. Е.А. Мудрецовоу, К.Е. Веселова. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Недра, 1990. 607 с.
- Петровский А.П., Федченко Т.А., Суютинов В.Н. Быстрый алгоритм решения прямой задачи гравиметрии // Геофизический журнал. 2007. Т. 29. № 2. С. 141–145.
- Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова думка, 1978. 228 с.