УДК 550.838

УРАВНЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОРАЗВЕДКИ (ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ НА ПОСТОЯННОМ ТОКЕ)

Мартышко П.С., Мартышко М.П. – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

Аннотация. Выведены новые векторные уравнения трёхмерной обратной задачи магниторазведки с учётом размагничивания (для внутреннего и внешнего полей). Уравнения позволяют использовать измерения в скважинах для автоматизированного решения обратной задачи. Совместное решение уравнений позволяет определить границу области и значение магнитной восприимчивости.

Магниторазведка, электроразведка, уравнения трёхмерных обратных задач.

THREE DIMENSIONAL MAGNETIC INVERSE PROBLEMS EQUATIONS (DIRECT CURRENT EXPLORATION)

Martyshko P.S., Martyshko M.P. – Institute of Geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

Abstract. The new 3D magnetic inverse problem equations have been derived (of interior and outside fields). We take into account demagnetization factor. Based on these equations it is possible to use method which does not require trial-and-error forward modeling and allows us to construct inverse problem solutions. Using borehole data we can determine the only solution.

Magnetic and electric exploration, 3D inverse problems equations.

Постановка задачи

Пусть D – односвязная область из евклидова пространства R^3 заполнена веществом с постоянной магнитной проницаемостью μ_2 и находится в среде с магнитной проницаемостью μ_1. Пусть W – магнитный потенциал индуцирующего поля (источники которого находятся вне D), V_1 – внешний, V_2 – внутренний потенциалы области D, наведённые в поле W.

Потенциалы V_1, V_2, W – гармонические функции, т. е.

$$\Delta V_1 = 0 \text{ в } D^-, \Delta V_2 = 0 \text{ и } \Delta W = 0 \text{ в } D. \tag{1}$$

Кроме того, на границе D – поверхности S – выполняются следующие соотношения

$$V_1 = V_2 \tag{2}$$

$$\mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} - \mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = (\mu_1 - \mu_2)\frac{\partial W}{\partial n}. \tag{3}$$

Решение прямой задачи магниторазведки (для магнитного поля) сводится к нахождению потенциалов V_1 и V_2 из условий (1)–(3). Обратная задача может быть сформулирована следующим образом: по заданной функции V_1, удовлетворяющей на границе искомой области условиям (1)–(3), найти эту область. Аналогичные задачи (с заменой магнитной проницаемости на электропроводность и магнитных потенциалов на электрические) возникают при интерпретации данных электроразведки.

Уравнения теоретической обратной задачи (ТОЗ) магниторазведки

Напомним, что обратную задачу будем называть теоретической, если функция, описывающая поле, задана в явном виде (ситуация, возникающая, например, после подбора наблюденных данных потенциалами сингулярных источников) (Мартышко, 1994).

Для функций V_1, V_2 справедливы представления (Сретенский, 1946):

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \left[V_1(P)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial V_1}{\partial n}\frac{1}{r} \right] dS = \begin{cases} V_1(P_0), P_0 \in R^3 \setminus \overline{D}, \\ 0, P_0 \in D; \end{cases} \tag{4}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \left[\frac{\partial V_2}{\partial n}\frac{1}{r} - V_2(P)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] dS = \begin{cases} V_2(P_0), P_0 \in D, \\ 0, P_0 \in CD; \end{cases} \tag{5}$$

где n – внешняя нормаль к S;

$$P(x,y,z) \in S; P_0(x_0,y_0,z_0) = P_0;$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Из условий (4), (5) с учетом (2) следует возможность представления

$$\frac{1}{4\pi}\int_S\left[\frac{\partial V_2(P)}{\partial n}-\frac{\partial V_1(P)}{\partial n}\right]\frac{dS}{r}= =\begin{cases}V_1(P_0),\ P_0\in R^3\setminus\overline{D},\\ V_2(P_0),\ P_0\in D;\end{cases} \quad (6)$$

Из (3) легко получить

$$\frac{\partial V_2}{\partial n}-\frac{\partial V_1}{\partial n}=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}\left(\frac{\partial W}{\partial n}+\frac{\partial V_1}{\partial n}\right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial n}-\frac{\partial V_1}{\partial n}=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}\left(\frac{\partial W}{\partial n}+\frac{\partial V_2}{\partial n}\right). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), имеем

$$V_1(P_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}\int_S\left(\frac{\partial W(P)}{\partial n}+\frac{\partial V_2(P)}{\partial n}\right)\frac{dS}{r}= =\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}\int_S\left(W(P)+V_2(P)\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}dS, \quad (9)$$

откуда в силу (2) получаем

$$V_1(P_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}\int_S\left(W+V_1\right)\frac{\partial 1/r}{\partial n}dS. \quad (10)$$

Соотношение (10) можно рассматривать как уравнение ТОЗ (Martyshko, 1999) для определения границы S. Аналогично, подставляя (7) в (6), получаем

$$V_1(P_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}\int_S\left(\frac{\partial W(P)}{\partial n}+\frac{\partial V_1(P)}{\partial n}\right)\frac{dS}{r}, \quad P_0\in R^3\setminus\overline{D}, \quad (11)$$

уравнение ТОЗ для внешнего магнитного потенциала. Аналогично можно получить новое уравнение для внутреннего потенциала

$$V_2(P_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}\int_S\left(\frac{\partial W(P)}{\partial n}+\frac{\partial V_1(P)}{\partial n}\right)\frac{dS}{r}, \quad P_0\in D. \quad (12)$$

Из соотношений (11) и (12) выведем уравнения для напряжённости магнитного поля $\vec{H}$:

$$\vec{H}_1(P_0)=grad\,V_1(P_0)= =\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}\int_S\left(\frac{\partial W}{\partial n}+\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)grad\frac{1}{r}ds \text{ , т. е.}$$

$$\vec{H}_1(P_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}\int_S\left((\vec{H}_0+\vec{H}_1)(P)\cdot\vec{n}\right)grad\frac{1}{r}ds, \quad P_0\in R^3\setminus\overline{D}, \quad (13)$$

$$\vec{H}_2(P_0)=grad\,V_2(P_0)= =\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}\int_S\left(\frac{\partial W}{\partial n}+\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)grad\frac{1}{r}ds\text{, т. е.}$$

$$\vec{H}_2(P_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}\int_S\left((\vec{H}_0+\vec{H}_1)(P)\cdot\vec{n}\right)grad\frac{1}{r}ds, \quad P_0\in D, \quad (14)$$

векторные интегральные уравнения обратной задачи магниторазведки (для внешнего и внутреннего полей соответственно).

При заданных значениях $\mu_1 = 1$ (предположим, что вмещающая среда немагнитна) и $\mu_2 = 1+4\pi\kappa$ (κ – магнитная восприимчивость) с использованием уравнений (13) или (14) можно построить эквивалентное семейство решений обратной задачи магниторазведки. Совместное решение этих уравнений позволяет определить единственное решение обратной задачи. Заметим также, что в скважинах выполняются измерения как внутреннего поля, так и магнитной восприимчивости. Это позволяет определить границу S из уравнения (14).

Перепишем уравнение (14) в виде

$$\vec{H}_2(P_0)=\frac{\kappa}{1+4\pi\kappa}\int_S\left((\vec{H}_0+\vec{H}_1)\cdot\vec{n}\right)grad_p\frac{1}{r}ds. \quad (15)$$

Связь между намагниченностью и напряжённостью определяется равенством $\vec{J}=\kappa\vec{H}$, с учётом этого получаем

$$\vec{J}_2(P_0)=\frac{\kappa^2}{1+4\pi\kappa}\int_S\left((\vec{H}_0+\vec{H}_1)(P)\cdot\vec{n}\right)grad_p\frac{1}{r}ds. \quad (16)$$

Соотношения (15) и (16) позволяют по граничным значениям внешнего поля вычислять намагниченность области D, либо использовать значения намагниченности и внешнего поля для определения границы S (решения обратной задачи).

Подставляя (8) в (6), имеем

$$V_2(P_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}\int_S\left(\frac{\partial W(P)}{\partial n}+\frac{\partial V_2(P)}{\partial n}\right)\frac{dS}{r}, \quad P_0\in D. \quad (17)$$

Беря градиент от обеих частей (17), имеем уравнение обратной задачи для внутреннего поля

$$\vec{H}_2(P_0) = \kappa \int_S \left((\vec{H}_0 + \vec{H}_2)(P) \cdot \vec{n} \right) grad_p \frac{1}{r} ds \,. \quad (18)$$

Из (18) следует формула вычисления внутреннего поля через намагниченность

$$\vec{H}_2(P_0) = \int_S \left(\vec{J}_2(P) \cdot \vec{n} \right) grad_p \frac{1}{r} ds$$

и формула вычисления намагниченности через её поверхностные значения

$$\vec{J}_2(P_0) = \kappa \int_S \left(\vec{J}_2(P) \cdot \vec{n} \right) grad_p \frac{1}{r} ds.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 14-27-00059.

Заключение

Получены представления гармонических функций, описывающих магнитное поле (внутреннее и внешнее) намагниченного тела через граничные значения. На основе этих представлений выведены уравнения обратных задач магниторазведки с явно заданным оператором. Подчеркнём, что рассматривается полная задача с учётом размагничивания, математически эквивалентная задачам электроразведки постоянным током и термометрии.

Указанное обстоятельство существенно расширяется область приложений проведённых исследований.

Литература

Мартышко П.С. О двухэтапных методах интерпретации данных электроразведки на постоянном токе // Физика Земли. 1994. № 9. С. 91–93.

Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 318 с.

Martyshko P.S. Inverse Problems of Electromagnetic Geophysical Fields. The Netherlands: VSP, 1999. 117 p.