УДК 550.372+519.6+51-73

ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЗОНДИРОВАНИЙ В ПОСТАНОВКЕ Г.М. ВОСКОБОЙНИКОВА

Хачай О.А. – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

Аннотация. Статья посвящена изложению теоретических результатов решения единой обратной задачи электромагнитных зондирований для одномерной среды, полученных под руководством Г.М. Воскобойникова, воспоминаниям о своем учителе.

Электромагнитные зондирования, одномерная среда, единый оператор решения обратной задачи, алгоритм регуляризации, одномерная интерпретация.

ABOUT ELECTROMAGNETIC SOUNDINGS INTERPRETATION AFTER VOSKOBOJNIKOV'S STATEMENT

Hachay O.A. – Institute of geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

Abstract The paper is devoted to present theoretical results of joined inverse problem solution for electromagnetic soundings in layered medium, which had been obtained under the direction of G.M. Voskoboynikov, to memory of my teacher.

Electromagnetic soundings, 1-d medium, joined operator of inverse problem solution, algorithms of regularization and 1-d interpretation.

Введение

Я поступила в аспирантуру в 1969 году к моему учителю Г.М. Воскобойникову, д.ф.-м.н., зав. лаб. математической геофизики после окончания физического факультета Уральского государственного университета по специальности астрофизика. Когда он узнал, что я занималась проблемой численного моделирования фотосфер звезд – голубых сверхгигантов, то сразу произнес свое решение: «Вы будете заниматься проблемой моделирования и решения обратных задач для электромагнитных полей. Сам я этой проблемой не занимаюсь, но надеюсь, что Вам это будет интересно». Так возникла тема: «Обратная задача электромагнитных зондирований для одномерной среды», которую я защитила в виде кандидатской диссертации в 1979 г.

10 лет моей жизни пролетели как один год, потому что они связывали меня с интереснейшим человеком: ученым с большой буквы, исследователем, порядочным и наичестнейшим человеком. Поэтому я хотела бы поподробнее вспомнить и рассказать об этом процессе нашего взаимодействия.

Все известные подходы к интерпретации аномалий электромагнитного поля включают в себя предположение о том, что геоэлектрические параметры нормального разреза известны. Поэтому в то время, да и в настоящее чрезвычайно актуально теоретическое и методическое рассмотрение вопроса об определении параметров нормального разреза, используя тот же набор входных электромагнитных данных и учитывая, что априорная информация о параметрах нормального разреза, как правило, бывает приближенной. С другой стороны, формальная интерпретация в рамках модели одномерной среды данных переменного электромагнитного поля, содержащих влияния всевозможных искажений локальных неоднородностей, приводит к непрогнозируемым ошибочным результатам.

В книге М.Н. Бердичевского и М.С. Жданова (Бердичевский, Жданов, 1981) теоретически рассмотрена задача об определении параметров нижележащей одномерной среды под слоем с известной мощностью и заданной проводимостью по данным, заданным на площади и на ряде частот пяти компонент переменного электромагнитного поля. Однако этот подход тоже требует априорной информации о геоэлектрических параметрах приповерхностного слоя. В работе (Weidelt, 1972) П. Вайдельтом показано, что оператор решения одномерной обратной задачи магнитотеллурического зондирования – самосопряженный оператор (Наймарк, 1969), при этом в качестве входных данных используются комплексные значения импеданса как функции частоты. С другой стороны, в работах, в частности (Агранович, 1974, 1975, 1977; Войтович, Каценеленбаум, Сивов, 1977), показано, что в общем случае задачи дифракции двумерного или трехмерного переменного электромагнитного поля на локальных неоднородностях описываются несамосопряженными операторами. Однако существует небольшое количество частных задач, приводящихся к самосопряженному оператору при определенном выборе функций, описывающих свойства среды и входящих в граничные условия задачи (Агранович, 1977). Спектральные свойства дифференциальных операторов рассмотрены достаточно подробно в математической литературе, например (Березанский, 1965; Гохберг, Крейн, 1965; Хермандер, 1965; Weidelt, 1972).

Здесь требуется небольшое отступление, связанное с методами работы Г.М. Воскобойникова. Он понимал, что если говорить о **количественной** интерпретации геофизических полей, то должна быть корректно сформулирована обратная задача, и методы ее решения должны опираться на современные методы математической физики. Как правило, эти методы читались физикам в очень сжатом виде, а книги перечисленных в библиографии авторов – известных математиков, оставались за пределами читаемых курсов. Однако любимое выражение Георгия Митрофановича: «Спасение утопающих – дело рук самих утопающих», – быстро приводило в чувство, и я по необходимости и с новой кипучей энергией вгрызалась в гранит математических наук.

Как следует из теории, спектральные свойства самосопряженных и несамосопряженных операторов различны. Благодаря этому математическому результату и результату, изложенному в работе (Weidelt, 1972), осуществлена регуляризация решения одномерной обратной задачи магнитотеллурики (Хачай 1978, 1980) с использованием идеи, высказанной В.Н. Страховым (Страхов, 1969), о фильтрации наблюденных данных в область определения оператора решения обратной задачи. Кроме того, в работе (Хачай, 1980) удалось распространить результат П. Вайдельта (Weidelt, 1972) сведения задачи электромагнитного зондирования одномерной среды с произвольным источником, расположенным вне Земли, к задаче с однородным возбуждением на случай искусственных дипольных источников, расположенных на поверхности Земли. Это позволило построить единый метод определения параметров нормального разреза по данным электромагнитного зондирования для наиболее часто применяемых в геофизической практике типов источников поля: горизонтального электрического диполя, вертикального магнитного диполя и плоской однородной волны.

Рассмотрим более подробно результаты решения поставленной Г.М. Воскобойниковым проблемы: единая обратная задача электромагнитных зондирований для одномерной среды.

Математическая постановка единой обратной задачи электромагнитных зондирований одномерной среды

Задачу электромагнитного зондирования будем рассматривать для одномерной среды (проводимость σ есть функция только координаты *z*, ось *OZ* направлена вниз) с постоянной магнитной восприимчивостью $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\,\text{Гн}/\text{м}$ в квазистационарном приближении. Рассмотрим три типа источников возбуждения электромагнитного поля: однородную плоскую электромагнитную волну, вертикальный магнитный диполь и горизонтальный электрический диполь. Зависимость от времени выберем в виде exp *(iωt).*

Сформулируем краевые задачи для каждого из названных источников.

I. *Плоская электромагнитная волна, падающая нормально к поверхности Земли*

Система уравнений Максвелла в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} H'_x(z,\omega) &= \sigma(z)E_y(z,\omega), \\ E'_y(z,\omega) &= i\omega\mu_0 H_x(z,\omega). \end{aligned} \qquad (1)$$

Штрихи означают дифференцирование по координате z. Исключив $H_x(z,\omega)$ из уравнения (1), получим:

$$E_y''(z,\omega) = i\omega\mu_0\sigma(z)E_y(z,\omega). \quad (2)$$

Введем, следуя (Weidelt, 1972), функцию отклика среды $c(\omega)$ при однородном возбуждении поля с помощью равенства:

$$\begin{aligned} &E_y'(z,\omega) = (-1/c(\omega))E_y(0,\omega), \\ &E_y(z,\omega) \to 0 \quad при \ z \to \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Функция $c(\omega)$ связана с входным импедансом среды $Z(0,\omega)$ соотношением:

$$c(\omega) = Z(0,\omega)/i\omega\mu_0. \quad (4)$$

Распределение проводимости с глубиной можно получить в результате решения обратной задачи (2–3).

II. *Вертикальный магнитный диполь, расположенный на поверхности Земли*

Введем цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z), ось OZ совпадает с осью диполя, начало координат совпадает с точкой расположения диполя.

Рассмотрим общий случай, когда диполь приподнят над Землей на высоту h. Физическим аналогом вертикального магнитного диполя является небольшая круглая рамка площадью dS и током I ампер. Первичный ток в рамке имеет только φ-ую составляющую, поэтому вектор-потенциал **F**, определяемый из соотношения **E**=-rot**F** имеет только z-составляющую во всех средах n-слойной среды: F_z (Великин, Франтов, 1962) (в дальнейших выкладках значок z при F будем опускать).

Из уравнений Максвелла и условий непрерывности магнитных и тангенциальных электрических составляющих поля на границе двух сред следует, что функция F в первой и второй средах должна удовлетворять следующей краевой задаче:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial F_j}{\partial\rho}\right] + \frac{\partial^2 F_j}{\partial z^2} - k_j^2 F_j = 0; \ j = 1,2. \quad (5)$$

$$F_1 = F_2, \ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \quad при \ \ z = h. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &F_j(z,\omega,\rho) \to 0 \ \ при \quad z \to \mp\infty, \\ &k_1^2 = i\omega\mu_0\sigma_1, \ k_2^2 = i\omega\mu_0\sigma(z). \end{aligned} \quad (7)$$

Вектор-потенциал, удовлетворяющий краевой задаче (5–6) в первой и второй средах, соответственно имеет вид:

$$\begin{aligned} &F_1(\rho_1, z, \omega) = M\,\frac{e^{-k_1 r}}{r} + \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\varphi_1(\lambda,\omega) \times \\ &\times \exp((\sqrt{\lambda^2 + k_1^2})z)d\lambda, z < h, \\ &F_2(\rho_1, z, \omega) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\varphi_2(\lambda,\omega) \times \\ &\times W(z,\lambda,\omega)d\lambda, \ z \ge h, \end{aligned} \quad (8)$$

где M – момент диполя ($M = \frac{IdS}{4\pi}; r^2 = \rho^2 + z^2$), функция $W(z,\lambda,\omega)$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} &W''(z,\lambda,\omega) = (\lambda^2 + i\omega\mu_0\sigma(z))W(z,\lambda,\omega), \\ &W(z,\lambda,\omega) \to 0 \ \ при \ z \to \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

По аналогии с задачей для однородного возбуждения, функцию отклика $\Phi(h,\lambda,\omega)$ одномерной среды при возбуждении поля вертикальным магнитным диполем введем с помощью равенства:

$$W'(h,\lambda,\omega) = -\frac{1}{\Phi(h,\lambda,\omega)}W(h,\lambda,\omega)\,. \quad (10)$$

Функции $\varphi_1(\lambda,\omega)$ и $\varphi_2(\lambda,\omega)$ в выражениях (8) определяются из граничных условий (6). В работах (Хачай, 1979, 1980) изложен подробный вывод связи функции отклика $\Phi(h,\lambda,\omega)$ с наблюденными значениями поля. Выпишем окончательное выражение для функции отклика $\Phi(0,\lambda,\omega)$ в явном виде:

$$\Phi(0,\lambda,\omega) = \frac{\int_0^\infty (J_0(\lambda\rho) - 1)H_z(0,\rho,\omega)\rho d\rho}{\lambda\int_0^\infty J_1(\lambda\rho)H_\rho(0,\rho,\omega)\rho d\rho}\,.(11)$$

Таким образом, для вычисления функции отклика необходимо иметь в качестве наблюденных данных две компоненты магнитного поля, наблюденных на поверхности Земли как функции расстояния (разноса) и частоты. При этом для этих компонент необходимо иметь измеренными модуль и фазу соответственно. Определение распределения проводимости с глубиной свелось к решению обратной задачи (9–10).

III. *Горизонтальный электрический диполь, расположенный на поверхности Земли*

Введем систему прямоугольных координат; ось *OX* направлена вдоль оси диполя, ось *OZ* направлена вниз, начало координат совпадает с точкой расположения диполя. Рассмотрим общий случай, когда проводимость верхнего полупространства отлична от нуля и диполь приподнят над Землей на высоту *h*. Электромагнитное поле такого диполя симметрично относительно плоскости *XOZ*. Вектор-потенциал поля **A**, определяемый соотношением **H**=rot**A** имеет две составляющие: A_x – параллельную оси диполя и A_z – перпендикулярную границе раздела, каждая из которых в первой и второй средах удовлетворяет уравнению:

$$\Delta A_x + k_j^2 A_x = 0;$$
$$\Delta A_z + k_j^2 A_z = 0; \quad j = 1{,}2; \tag{12}$$
$$k_1^2 = i\omega\mu_0\sigma_1;\ k_2^2 = i\omega\mu_0\sigma(z)$$

и граничным условиям при $z=h$ (Заборовский, 1960):

$$A_{x1} = A_{x2};\ A_{z1} = A_{z2};$$
$$\frac{1}{k_1^2}\operatorname{div}\vec{A}_1 = \frac{1}{k_2^2}\operatorname{div}\vec{A}_2;\ \frac{\partial A_{x1}}{\partial z} = \frac{\partial A_{x2}}{\partial z}. \tag{13}$$

Введем цилиндрическую систему координат (ρ,φ,*z*), начало и ось *OZ* которой совпадают с началом и осью декартовой системы; плоскость *XOZ* является началом отсчета азимутальных углов φ.

Решая уравнения (12) в цилиндрической системе координат методом разделения переменных, получим следующие выражения для составляющих вектора-потенциала в первой и второй средах (Заборовский, 1960):

$$A_{x1}(\rho, z, \omega) = p\frac{e^{-k_1 r}}{r} + \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\varphi_1(\lambda,\omega)\times$$
$$\times\exp(\sqrt{\lambda^2 + k_1^2}\, z)d\lambda,\ z < h, \tag{14.1}$$

$$A_{z1}(\rho, z, \omega) = \mathrm{Cos}\varphi\int_0^\infty J_1(\lambda\rho)\psi_1(\lambda,\omega)\times$$
$$\times\exp(\sqrt{\lambda^2 + k_1^2}\, z)d\lambda,\ z < h, \tag{14.2}$$

$$A_{x2}(\rho, z, \omega) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\varphi_2(\lambda,\omega)\times$$
$$\times Y(z,\lambda,\omega)d\lambda,\ z \ge h, \tag{14.3}$$

$$A_{z2}(\rho, z, \omega) = Cos\,\varphi\int_0^\infty J_1(\lambda\rho)\psi_2(\lambda,\omega)\times$$
$$\times Y(z,\lambda,\omega)d\lambda,\ z \ge h, \tag{14.4}$$

где *p*-момент диполя; функция $Y(z,\lambda,\omega)$ удовлетворяет уравнению:

$$Y''(z,\lambda,\omega) = (\lambda^2 + i\omega\mu_0\sigma(z))Y(z,\lambda,\omega);$$
$$Y(z,\lambda,\omega) \to 0\ \ при\ \ z \to \infty. \tag{15}$$

По аналогии с рассмотренными задачами введем функцию отклика одномерной среды при возбуждении поля горизонтальным электрическим диполем $R(h,\lambda,\omega)$ с помощью соотношения:

$$Y'(h,\lambda,\omega) = -\frac{1}{R(h,\lambda,\omega)}Y(h,\lambda,\omega). \tag{16}$$

Функции $\varphi_1(\lambda,\omega), \varphi_2(\lambda,\omega), \psi_1(\lambda,\omega), \psi_2(\lambda,\omega)$ в выражениях (14.1–14.4) определяются из граничных условий (13).

В работах (Хачай, 1979, 1980) изложен подробный вывод связи функции отклика $R(h,\lambda,\omega)$ с наблюденными значениями поля. Выпишем окончательное выражение для функции отклика $R(0,\lambda,\omega)$ в явном виде:

$$R(0,\lambda,\omega) = -(2/\lambda)\times$$
$$\times\left[1 + \frac{\int_0^\infty (h_\rho(0,\rho,\varphi) + h_\varphi(0,\rho,\varphi))J_0(\lambda\rho)\rho d\rho}{\int_0^\infty h_z(0,\rho,\varphi)J_1(\lambda\rho)\rho d\rho}\right]. \tag{17}$$

Таким образом, функция отклика одномерной среды при возбуждении поля горизонтальным электрическим диполем связана, как и в случае II с интегральными значениями горизонтальных и вертикальной составляющими магнитного поля на дневной поверхности. При этом необходимо, чтобы были измерены модуль и фаза соответствующих компонент в ряде точек на профиле и для достаточного представительного количества частот. Определение распределения проводимости с глубиной свелось к решению обратной задачи (15–16).

Перейдем к построению единого оператора решения обратной задачи электромагнитных зондирований.

Как видно из (9–10) и (15–16), краевые задачи электромагнитного зондирования одномерной среды при возбуждении поля вертикальным магнитным диполем и горизонтальным электрическим диполем совпали, причем $Y(z,\lambda,\omega)=W(z,\lambda,\omega)$ и $\Phi(0,\lambda,\omega)=R(0,\lambda,\omega)$. Отсюда следует тождественность оператора решения обратной задачи для одномерной среды для рассмотренных двух типов искусственного возбуждения поля. Входными данными для решения обратной задачи (9–10) и (15–16) являются значения функции отклика, вычисленные по формулам (11) и (17).

Тождество оператора решения обратной задачи для рассмотренных типов дипольного зондирования одномерной среды позволяет использовать единые алгоритмы обработки и интерпретации экспериментальных данных. Кроме того, дает возможность определять параметры нормального разреза, т.е. распределение проводимости с глубиной по совокупности значений функции отклика, полученных при возбуждении поля магнитным и электрическим диполями после предварительной фильтрации данных в область определения оператора решения одномерной обратной задачи. Поскольку наблюденные данные в своем большинстве неполные, то возможность одновременного единообразного использования этих данных, полученных двумя независимыми методами электромагнитного зондирования, позволит, безусловно, существенно повысить достоверность интерпретации.

Наконец, краевые задачи (9–10) и (15–16) с помощью замены переменных (Weidelt, 1972):

$$\tilde{z}=\frac{\mathrm{ch}\lambda z}{\lambda},\qquad \tilde{W}(\tilde{z},\omega)=W(z,\lambda,\omega)/\mathrm{ch}\lambda z,$$
$$\tilde{\sigma}(\tilde{z})=\sigma(z)\mathrm{ch}^4(\lambda z) \tag{18}$$

удается свести к краевой задаче для однородного возбуждения (2–3):

$$\begin{aligned}&\tilde{W}''(\tilde{z},\omega)=i\omega\mu_0\tilde{\sigma}(\tilde{z}))\tilde{W}(\tilde{z},\omega),\\&\tilde{W}(\tilde{z},\omega)\to 0\quad \text{\textit{при}}\ \ \tilde{z}\to\infty,\\&\tilde{W}'(0,\omega)=-\frac{1}{\Phi(0,\lambda,\omega)}\tilde{W}(0,\omega).\end{aligned}\tag{19}$$

Функции $\tilde{W}(\tilde{z},\omega)$ и $\Phi(0,\lambda,\omega)$ здесь формально играют роль $E_y(0,\omega)$ и $c(0,\omega)$ задачи (2–3), но не для истинного, а трансформированного в соответствии с преобразованием (18) разреза. Следовательно, при возбуждении поля рассмотренными дипольными источниками, в отличие от однородного возбуждения, сначала из решения задачи (2–3) определяется функция $\tilde{\sigma}(\tilde{z})$ – трансформированный нормальный разрез, а затем путем обращения формул (18–19) – функция $\sigma(z)$.

Под входными «наблюденными» данными для обратной задачи (2–3) в дальнейшем будем понимать значения комплексной функции отклика, вычисленные по формулам (4), (11), (17) по наблюденным значениям составляющих (модуля и фазы) электромагнитного поля. Следует отметить, что предложенный формализм, позволяющий единообразно решать обратную задачу электромагнитного зондирования одномерной среды, удалось построить с использованием функции отклика, а не импеданса среды, обычно применяемых при качественной интерпретации данных ЭМЗ.

Отдельно следует сделать еще одно отступление. Георгий Митрофанович обладал очень мощной интуицией при построении новых теорий интерпретации геофизических данных. Он никогда не стремился создавать теорию ради теории. Он всегда говорил, что правильная теория всегда имеет практический выход, и ревностно следил за тем, чтобы и его ученики придерживались этой рекомендации.

Вот и теперь, преимущество предложенного подхода особенно очевидно, когда на практике, например (Астраханцев и др. 1977), необходимо было интерпретировать данные, полученные на одной и той же площади разными методами электромагнитного зондирования. Кроме того, в этой постановке с помощью входных данных в виде комплексной функции отклика, зависящей от частоты, при интерпретации достигается учет как модульных, так и фазовых характеристик поля. В работе (Хачай, 1980) подробно изложен алгоритм вычисления функции отклика одномерной среды для трех рассматриваемых типов источников электромагнитного поля.

Алгоритм регуляризации одномерной обратной задачи электромагнитных зондирований

Известно (Гельфанд, Левитан, 1951; Тихонов, 1965; Weidelt, 1972), что для данных, принадлежащих области *M* определения оператора решения обратной задачи, решение существует и оно единственно. Однако определяемые из практических измерений входные данные могут быть осложнены влиянием локальных неоднородностей и поэтому могут содержать значения, не принадлежащие области *M*. В этом случае необходима регуляризация.

Идея получения регуляризованных входных данных (т.е. таких, для которых существует решение одномерной обратной задачи) заключается в том, чтобы построить для функции отклика аналитическую аппроксимационную конструкцию, удовлетворяющую необходимым и достаточным условиям существования решения и допускающую приближенное выражение произвольной функции, принадлежащей области *M* с любой наперед заданной точностью. Определяя параметры аппроксимационной конструкции из условия минимума уклонений от входных данных (в подходящей метрике), мы тем самым осуществляем идею (Страхов, 1969) фильтрации наблюденных данных в область определения оператора решения обратной задачи.

Реализация этой идеи достигнута следующим образом. Краевая задача (19) после замены переменных (Weidelt, 1972)

$$\omega \to k = \sqrt{i\omega\mu_0\tilde{\sigma}(0)}, \qquad \tilde{z} \to x = \int\limits_0^{\tilde{z}} \sqrt{\tilde{\sigma}(t)/\tilde{\sigma}(0)}\,dt,$$
$$\tilde{W}(\tilde{z},\omega) \to f(x,k) = \sqrt[4]{\tilde{\sigma}(z)/\tilde{\sigma}(0)}\left(\tilde{W}(\tilde{z},\omega)/\tilde{W}(0,\omega)\right), \quad (20)$$
$$\sigma(z) \to u(x) = \sqrt[4]{\tilde{\sigma}(z)/\tilde{\sigma}(0)}$$

преобразуется к каноническому виду задачи Штурма-Лиувилля (Наймарк, 1969):

$$f''(x,k) = (k^2 + V(x))\,f(x,k),$$
$$f'(0,k) = \left[-\frac{1}{\Phi(0,\lambda,k)} + u'(0)\right] f(0,k), \quad (21)$$
$$\Phi(0,\lambda,k) = \Phi(0,\lambda,\omega(k)),$$

где $V(x) = u''(x)/u(x)$ – непрерывная функция при $0 \le x < \infty$. Спектральная функция *s(*θ*)*(Наймарк, 1969) линейного дифференциального оператора, определяемого выражением $f''(x,k) - V(x)f(x,k)$ и граничным условием (21), связана, как показано в (Weidelt, 1972), с функцией отклика одномерной среды интегральными соотношениями:

$$s(\theta) = \int\limits_0^{\theta} a(\theta)\,d\theta, \quad \Phi(0,\lambda,\omega) = \int\limits_0^{\vartheta} \frac{a(\vartheta)\,d\vartheta}{\vartheta + i\omega}. \quad (22)$$

Причем функция отклика $\Phi(0,\lambda,\omega)$ удовлетворяет асимптотическим условиям:

$$\Phi(0,\lambda,\omega) \cong \frac{1}{\sqrt{i\omega\mu_0\sigma(0)}} \quad \text{при } \omega \to 0; \quad (23)$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \Phi(0,\lambda,\omega) = \tilde{z}_m = \begin{cases} \infty, \textit{если нет} \\ \textit{идеального проводника} \\ z_m - \textit{глубина} \\ \textit{идеального проводника} \end{cases}$$

Условия (22–23), налагаемые на функцию отклика $\Phi(0,\lambda,\omega)$, необходимы для существования решения одномерной обратной задачи и должны быть использованы для построения аппроксимационной конструкции. Присоединим к ним условия, достаточные для того, чтобы неубывающая функция *s*(θ) была спектральной функцией оператора Штурма-Лиувилля. Эти условия таковы (Наймарк, 1969):

1. При любом вещественном θ существует интеграл $\int\limits_{\infty}^{\theta} \exp(\sqrt{|\theta|x})\,ds(\theta)$.
2. Если положить $\tau(\theta) = \begin{cases} s(\theta) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\theta} & \textit{при}\,\theta > 0 \\ s(\theta) & \textit{при}\ \theta < 0 \end{cases}$,

то интеграл $\int\limits_1^{\infty} \theta^{-1} \cos\sqrt{\theta}x\,d\tau(\theta)$ существует

для всех $x \geq 0$, и при $x \geq 0$ функция
$$b(x) = \int_1^\infty \theta^{-1} \cos \sqrt{\theta} x d\tau(\theta)$$
имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно.

3. Множество точек роста спектральной функции имеет хотя бы одну конечную предельную точку.

Условия (22–23) и (1–3) в совокупности являются достаточными условиями существования решения одномерной обратной задачи.

В качестве аппроксимационной конструкции для функции $s(\theta)$ нами выбрано выражение:

$$s(\theta) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\theta} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j u(\theta - \theta_j) \; при \; \theta \geq \theta_0, \\ 0 \qquad\qquad при \;\; \theta < \theta_0, \end{cases} \quad (24)$$

где $\theta_0 ..., \;\; \theta_j ,..., \;\; a_j ,...$ – вещественные неотрицательные числа;

$$u(\theta - \theta_j) = \begin{cases} 1 \; при \, \theta \geq \theta_j, \\ 0 \;\; при \, \theta < \theta_j, \end{cases} \quad \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... (25)$$

Тогда $a(\theta)$ согласно (22) равно:

$$a(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{\theta}} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j \delta(\theta - \theta_j) \; при \; \theta \geq \theta_0, \\ 0 \qquad\qquad при \; \theta < \theta_0, \end{cases} (26)$$

где $\delta(\theta - \theta_j)$ – дельта-функция.

Подставив выражение (26) в (22) и полагая $a_0 = \sqrt{\mu_0 \tilde{\sigma}(0)}$, получим:

$$\Phi(0,\lambda,\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{a_0}{\sqrt{i\omega\mu_0\tilde{\sigma}(0)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{i\omega}{\theta_0}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{\theta_j + i\omega}. \quad (27)$$

Функция $\Phi(0,\lambda,\omega)$ в виде (27) удовлетворяет условиям (22–23) и (1–3) и используется далее как аппроксимационная конструкция для функции отклика.

Опять отступление. Этот результат я докладывала на семинаре В.И. Дмитриева в МГУ. Когда В.И. увидел выражение для функции отклика (27), он открыл ящик своего стола, долго что-то искал, а потом достал какие-то старенькие листочки, на которых мелким шрифтом что-то было написано. «Да, действительно, Андрей Николаевич Тихонов тоже получал такое выражение, но не использовал его так, как сделали это Вы», – сказал он. Я передала эту фразу Георгию Митрофановичу, он слегка улыбнулся, но видно было, что в глубине души был очень доволен.

Надо сказать, что в то время процесс регуляризации задач геофизики носил очень абстрактный характер. Геофизики знали, что этот процесс необходим, но что и как его осуществлять – был большой вопрос. Ссылались на В.К. Иванова, М.М. Лаврентьева, А.Н. Тихонова иногда по очереди, иногда на всех вместе. Нам же удалось построить регуляризованное решение конкретно для оператора нашей обратной задачи. Георгий Митрофанович очень гордился этим.

В данном случае нахождение минимума уклонения аппроксимирующей функции от входных данных в метрике L_2 в комплексной плоскости $\ln\Phi$ наиболее отвечает характеру решаемой задачи. При этом обеспечивается равномерная относительная точность приближения во всем диапазоне изменения Φ. Кроме того, получается простая конструкция, позволяющая, например, данные магнитотеллурического зондирования фильтровать, раздельно учитывая наблюдения модуля и фазы импеданса. С учетом сказанного в качестве функции цели выбрана функция:

$$Q(a_j,\theta_j) = \sum_{(k)} \left| \ln\Phi^{н}(\omega_k) - \ln\Phi^{m}(a_j,\theta_j,\omega_k) \right|^2, \quad (28)$$

где $\Phi^{н}(\omega_k)$ – значения функции отклика, вычисленные по наблюденным данным по формулам (4), (11), (17); $\Phi^{m}(a_j,\theta_j,\omega_k)$ – значения теоретической функции отклика, вычисленные по формуле (27). Полученные в результате значения $\Phi^{m}(a_j,\theta_j,\omega_k)$ являются регуляризованными данными, обладающие тем свойством, что они принадлежат области определения оператора решения одномерной обратной задачи и наилучшим образом выбранной метрике соответствуют в совокупности как модульным, так и фазовым наблюденным данным.

Алгоритм решения одномерной обратной задачи

Решение одномерной обратной задачи по регуляризованным данным можно получить, применяя строгий алгоритм (Weidelt, 1972), причем точность численных операций, связанных с применением этого метода, может быть как угодно высока. Однако алгоритм (Weidelt, 1972) слишком труден и сложен для массового применения, в чем признавался сам П. Вайдельт в своей работе (Weidelt, 1972). Поэтому нами был разработан приближенный алгоритм решения одномерной обратной задачи (Хачай, 1978), который основан на принципе последовательного послойного аппроксимационного продолжения входного импеданса $Z(\omega)$, заданного на поверхности Земли как комплексная функция частоты, вглубь среды. Способ интерпретации, сходный в идейном отношении с рассмотренным, был предложен в работе (Светов, Хализов, 1976). При этом в качестве значений входного импеданса используются его значения, вычисленные по регуляризованным значениям функции отклика по формуле:

$$Z(\omega) = \Phi^m(0, \lambda, \omega) i\omega\mu_0.$$

Кратко алгоритм сводится к следующему: независимо от истинного распределения проводимости среды аппроксимируем его кусочно-постоянной функцией, т.е. принимаем, что среда состоит из слоев с удельными сопротивлениями $\tilde{\rho}_n$ и мощностями $\tilde{h}_n (n = 1,2,...)$ соответственно, число слоев и их параметры заранее не фиксируются.

Учитывая закономерности распространения электромагнитного поля в проводящей среде, всегда можно выбрать такую большую частоту, что входной импеданс n-слойной среды $Z_n(\omega_i)$ на этой частоте будет определяться только сопротивлением верхнего проводящего слоя. Поэтому аппроксимируем его входным импедансом эквивалентного полупространства $Z_1(\omega_1)$, по которому найдем сопротивление первого слоя. С уменьшением частоты электромагнитное поле проникает в нижележащие слои, и их влияние начинает сказываться на значении входного импеданса n-слойной среды. Уменьшим частоту до значения $\omega_2 = \omega_1 - \Delta\omega$. Входной импеданс $Z_n(\omega_2)$ на частоте ω_2 аппроксимируем входным импедансом двухслойной среды с параметрами $\tilde{\rho}_1, \tilde{h}_1, \tilde{\rho}_2$. Параметр $\tilde{h}_1$ определяется из условия того, что на глубине $\tilde{h}_1$ входной импеданс, аналитически продолженный через первый слой, имеет фазу, равную $\pi/4$ и следовательно вновь может быть представлен как импеданс некоторого эффективного полупространства. Удельное сопротивление $\tilde{\rho}_2$ принимается за сопротивление второго слоя. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет исчерпана частотная кривая импеданса. В случае, когда имеется дополнительная геологическая информация о геоэлектрическом строении верхней части разреза, алгоритмом предусмотрен ее учет при помощи аналитического продолжения входного импеданса через среду с известными параметрами. После этого интерпретация ведется с использованием алгоритма, описанного выше.

В результате решения одномерной обратной задачи предложенным алгоритмом можно получить набор разрезов, которые существенно зависят в пределах квазиэквивалентности от принятого начального значения ω_1 и шага смещения по частотной кривой, но обладают тем свойством, что при решении соответствующей прямой задачи в своем большинстве дают хорошее согласие с входными данными. Из них делается выборка разрезов, удовлетворяющих входным данным с заданной точностью.

При решении обратной задачи электромагнитного зондирования с дипольным источником необходимо перейти от полученного набора параметров $\{\tilde{\sigma}_j, \tilde{h}_j\}$, соответствующих трансформированному разрезу, к параметрам в естественной системе координат.

$$h_j = \frac{1}{\lambda}\operatorname{arcth}(\lambda \tilde{h}_j); \; z = \frac{1}{\lambda}\operatorname{arcth}(\lambda \tilde{z});$$
$$\sigma(z) = ch^{-4}(\lambda z)\sigma(\lambda^{-4} th(\lambda z)).$$

Заключение

Все алгоритмы, изложенные выше, реализованы в виде программ, составленных на языке Фортран и прошли апробацию на теоретических и практических примерах.

Имя Георгия Митрофановича было широко известно за пределами нашего Института. К нам в лабораторию приезжали на семинары практически ежегодно В.Н. Страхов, В.И. Старостенко со своими учениками, А.И. Прилепко, В.Г. Чередниченко, наша лаборатория имела тесный контакт с В.К. Ивановым и его учениками. Все это предполагало хорошую почву для роста нас, молодых. Георгий Митрофанович воспитывал в нас самостоятельность творчества и умение не пасовать перед трудностями. Это позволило в дальнейшем получать все более сложные результаты для более сложных задач.

Литература

Агранович М.С. Несамосопряженные операторы в задачах типа дифракции на диэлектрическом теле // Радиотехника и электроника. 1974. Т. 19. № 5. С. 970–979.

Агранович М.С. О несасопряженных интегральных операторах с ядрами типа функции Грина и связанных с ними задачах дифракции // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20. № 7. С. 1370–1378.

Агранович М.С. Спектральные свойства задач дифракции // Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции: Дополнение / Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. М.: Наука, 1977. С. 386–389.

Астраханцев Г.В., Бабаков Ю.П., Булашевич Ю.П. и др. Индукционное зондирование земной коры на Урале с применением МГД-генераторов // ДАН СССР. 1977. Т. 237. № 4. С. 808–812.

Бердичевский М.Н., Жданов М.С. Интерпретация аномалий переменного электромагнитного поля Земли. М.: Недра, 1981. 327 с.

Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Изд-во Наукова Думка, 1965. 264 с.

Великин А.В., Франтов Г.С. Электромагнитные поля, применяемые в индукционных методах электроразведки. М.: Гостоптехиздат, 1962. 534 с.

Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977. 415 с.

Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1951. Т. 15. Вып. 4. С. 309–360.

Гохберг Ю.М., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 432 с.

Заборовский А.И. Переменные электромагнитные поля в электроразведке. М.: Изд-во МГУ, 1960. 115 с.

Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

Светов Б.С., Хализов А.Л. Амплитудно-фазовый способ послойной интерпретации магнитотеллурических зондирований горизонтально-слоистых сред // Прикладная геофизика. М.: Недра, 1976. С. 142–146.

Страхов В.Н. Теория приближенного решения линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве и ее использование в разведочной геофизике. I // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1969. № 8. С. 30–53.

Тихонов А.Н. К математическому обоснованию электромагнитных зондирований // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 1965. Т. 5. № 3. С. 545–548.

Хачай О.А. К вопросу о решении обратной задачи магнитотеллурического зондирования для комплексного импеданса // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1978. № 12. С. 45–51.

Хачай О.А. Обратная задача электромагнитного зондирования одномерной среды: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1979.

Хачай О.А. Унифицированный метод решения обратной задачи электромагнитных зондирований для одномерной среды // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 5. С. 51–60.

Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Наука, 1965. 542 с.

Weidelt P. The inverse problem of geomagnetic induction // Zeitschrift fur Geophysik. 1972. V. 38. P. 257–289.