

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Ладовский И.В., Шестаков А.Ф. – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

Аннотация. В работе рассматривается новый подход к решению задач линейного сопряжения для стационарных геофизических полей, возбуждаемых в кусочно-однородных средах. Обсуждается формализм построения решения для стационарных тепловых, электрических и магнитных полей в рамках единых модельных представлений с использованием аппарата обобщенных функций. Для решения задачи от многих тел в однородной вмещающей среде получена система интегральных уравнений и построен алгоритм последовательного учета плоских контактов.

Теория потенциала, задача линейного сопряжения, кусочно-однородная среда.

ON THE SOLVING LINEAR CONJUGACY PROBLEM FOR STATIONARY GEOPHYSICAL FIELDS IN PIECEWISE-HOMOGENEOUS MEDIA

Ladovskiy I.V., Shestakov A.F. – Institute of Geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

Abstract. In this paper we consider a new approach to solving linear conjugacy problem for the stationary geophysical fields excited in a piecewise-homogeneous media. We discuss the formalism for constructing solutions for steady-state thermal, electrical and magnetic in a single model representations using the apparatus of generalized functions of papers devoted. To solve the problem of many-body set in homogeneous containing medium is obtained integral equation system and the algorithm for account of flat contacts is developed.

Potential theory, the problem of linear conjugation, piecewise-homogeneous medium.

Введение

Среди граничных задач в теории потенциала особое место занимают задачи линейного сопряжения, имеющие отношение к потенциальным геофизическим полям, для моделей кусочно-однородных сред. Так, например, стационарные поля электрической, магнитной или тепловой природы удовлетворяют однотипным дифференциальным уравнениям и имеют сходную математическую структуру. Вся разница определяется только видом функции распределения источников первичного поля и условиями на границе раздела «земля – воздух».

Классический метод решения подобного класса задач в трехмерной постановке восходит к работе (Франк, Мизес, 1937), где решение прямой задачи электроразведки на постоянном токе для локального объекта в однородной проводящей среде сведено к интегральному уравнению Фредгольма II рода относительно плотности простого слоя – эквивалентных источников, «наведенных» на границе неоднородности.

Математический формализм получения уравнения основан на интегральном представлении внешнего и внутреннего потенциалов и последующем их «сшивании» на границе аномалиеобразующего объекта с использованием естественных граничных условий, налагаемых на поведение потенциала и его нормальную производную вблизи контактной поверхности раздела материальных параметров среды.

Дальнейшее развитие этого подхода применительно к стационарным электромагнитным полям с использованием потенциала двойного слоя изложено в работе (Воскобойников, 1973), где предложен также алгоритм, повышающий математическую обусловленность интегрального уравнения для практических расчетов, и рассмотрен важный с практической точки зрения случай однородного проводящего полупространства (содержащего неоднородность) с плоской границей раздела земля – воздух.

Последующие работы в этом направлении характеризуются исследованием

прикладных аспектов проблемы численной реализации, а также распространением подхода для решения задач индуктивной электроразведки. В частности, были разработаны эффективные алгоритмы решения прямой задачи электроразведки на постоянном токе для цилиндрических тел конечной длины с произвольным по форме основанием (Гуревич, 1979) и метода искусственного подмагничивания (МИП) в классе параметризованных областей (Мартышко, 1982; 1996).

В тех случаях, когда возмущающий объект относится к классу тел определенной геометрической формы, удалось получить решение задачи в замкнутом аналитическом виде на основе метода разделения переменных в трехмерном уравнении Лапласа и нахождения соответствующих частных решений внутренней и внешней краевых задач (Халфин, 1956; Гуревич, 1975 и др.).

В двумерном варианте решение прямых задач электроразведки на постоянном токе и МИП базируется на мощном аппарате теории функций комплексного переменного и исходит из соответствующей постановки задачи линейного сопряжения для аналитических функций. Искомый результат для конечной односвязной области, ограниченной аналитическим контуром, определяется интегралом типа Коши с плотностью, находимой из решения интегрального уравнения (Цирульский, 1975; Цирульский, Мартышко, 1979; Мартышко, 1996).

В частных случаях, когда граница неоднородности может быть аппроксимирована одной из координатных поверхностей, либо объект относится к определенному классу форм, решение прямых задач для стационарных электрического, магнитного и теплового полей удается получить в замкнутом виде (Цирульский, 1975; Мартышко, 1982; Ладовский, 1990).

Характерной особенностью классического подхода и основанных на нем методов решения прямой задачи является предварительное определение ветвей решения (тем или иным способом) в областях постоянства материальных параметров среды,

которые затем сшиваются с использованием естественных граничных условий, поскольку не существует единого непрерывного дифференциального оператора, описывающего поведение искомого потенциала во всем континуальном пространстве \mathcal{R}^3 , включая контактные границы сопредельных областей.

При исследовании задач линейного сопряжения с использованием аппарата обобщенных функций оказалось, что можно избежать процедуры построения частных решений для каждой однородной подобласти и последующего их сшивания на границах сопредельных сред. Для этого необходимо доопределить значения разрывных полевых функций и материальных параметров среды на граничной поверхности контакта. Основанный на этой концепции континуальный подход для кусочно-однородного пространства \mathcal{R}^3 предполагает получение единого оператора решения прямой задачи для соответствующего потенциала в произвольной точке «безграничного» пространства \mathcal{R}^3 , как в точках непрерывности, так и в точках разрыва материальных параметров среды.

Специфика применения континуального подхода в задачах сопряжения рассмотрена применительно к модели одного локального (контрастного по электропроводности) объекта в однородной безграничной среде, возбуждаемой сторонним током (Ладовский, Шестаков, 2007). Локализация источников стороннего тока достаточно произвольна. Кусочно-гладкое решение задачи представляется суммой Пуассоновских интегралов: объемного потенциала источников первичного поля в кусочно-однородной безграничной среде и поверхностного потенциала простого слоя с плотностью, распределенной по границе контакта сопредельных сред. Неизвестная плотность простого слоя вычисляется через скалярное произведение внешней нормали и вектора электрического поля, отнесенного к точкам границы. Значение последнего равно полусумме своих лево- и правосторонних граничных пределов. Как обобщенная функция, заданная на множестве сверточных трансформант обратных расстояний, проекция разрывного вектора

на непрерывное поле нормалей к граничной поверхности лежит в основе получения интегрального уравнения для плотности простого слоя – уравнения Фредгольма II рода со слабо-сингулярным ядром.

В настоящей работе рассматривается дальнейшее развитие методики исследования краевых задач линейного сопряжения потенциалов токов растекания для системы многих тел. Постановка задачи и все выкладки приводятся применительно к потенциалу стационарного электрического поля. Аналогичным образом можно сформулировать постановку задач линейного сопряжения и для других геофизических полей, в частности магнитного с учетом размагничивающего эффекта и теплового в стационарном приближении.

Инструментальный базис метода, применяемый в контексте континуального подхода – вторая обобщенная формула Грина для многосвязной области. При этом никаких затруднений с вычислением объемного интеграла по областям локализации источников первичного поля не возникнет. Проблема в другом. В интегральной формуле решения прямой задачи вторичный потенциал простого слоя берется по всем поверхностям, разграничивающим среду на однородные подобласти. Соответственно, уравнение простого слоя трансформируется в систему уравнений, число которых совпадает с количеством областей связности (в этом, кстати, и состоит принцип взаимовлияния контрастных по электропроводности объектов). Помимо технических трудностей при решении подобной задачи, встает вопрос о параметризации функции многосвязной области в единой системе координат. И только для простейших областей просматривается путь возможного применения методов аналитического анализа.

Постановка задачи

Будем предполагать, что в однородном бесконечном пространстве \mathcal{R}^3 с проводимостью σ расположены K непересекающихся подобластей D_i с гладкими границами S_i и постоянными значениями электропроводности σ_i ($i = 0, \dots, K$) (см. рис. 1). Требуется найти распределение электриче-

ского потенциала $U(M)$ во всех точках проводящей среды, включая контактные поверхности.

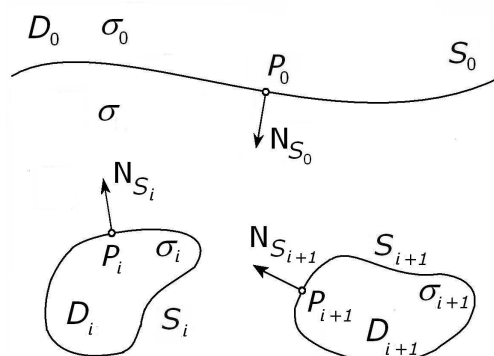


Рис. 1. К постановке задачи

Пусть $S_i := \{x = x_{S_i}\}$; $x := (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ – уравнение контактной поверхности i -ой области, разделяющей среды с проводимостями σ_i и σ . Условие неразрывности полного тока во всем пространстве

$$\operatorname{div}(\mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{ст}}) = 0 \quad (1)$$

является исходным оператором прямой задачи для электрического потенциала U токов растекания в проводящих средах (Франк, Мизес, 1937). Вектор плотности тока в проводящей среде $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ связан законом Ома с напряженностью электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla U$; $\mathbf{J}_{\text{ст}}$ – плотность стороннего тока, характеризующего мощность источников первичного поля $q = -\operatorname{div} \mathbf{J}_{\text{ст}}$, заданных в подобласти V_C кусочно-однородного пространства \mathcal{R}^3 .

В точках непрерывности параметра электропроводности условие (1) эквивалентно системе уравнений Пуассона для кусочно-гладких потенциалов

$$U_i(x_M); \quad i = \overline{(0 \div K)}; \\ \sigma_i \nabla^2 U_i = -q_i; \quad x = x_M \in D_i. \quad (2)$$

В точках разрыва проводящих свойств среды объемный дифференциальный оператор (1) заменяется поверхностной (Гауссовой) дивергенцией, которая выражает условие непрерывности *нормальной* составляющей плотности тока на границе S_i

идеального электропроводного контакта сопредельных сред. И если сторонние поверхностные токи не заданы, то $\sigma_i E_i^N = \sigma E^N$ или

$$\sigma_i \frac{\partial U_i}{\partial N_{S_i}} = \sigma \frac{\partial U}{\partial N_{S_i}}; \quad x = x_S \in S_i, \quad (3)$$

где N_{S_i} – внешняя нормаль к граничной поверхности S_i .

Условие непрерывности потенциалов

$$U_i = U, \quad i = (\overline{0 \div K}) \quad (4)$$

на контактных поверхностях S_i замыкает множество корректности постановки прямой задачи сопряжения для моделей кусочно-однородных сред.

Заметим, что граничное условие (3) можно переформулировать в терминах «плотности простого слоя», образуем на поверхности разнородного электропроводного контакта:

$$v_i(S_i) = \frac{\partial U_i}{\partial N_{S_i}} - \frac{\partial U}{\partial N_{S_i}} = \varepsilon_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial N_{S_i}} + \frac{\partial U}{\partial N_{S_i}} \right), \quad (5)$$

$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i - \sigma}{\sigma_i + \sigma}$ – параметр электропроводной

контрастности контактирующих сред. Соотношения (4–5) являются исходными для обоснования континуальной постановки задачи сопряжения.

Обобщенно-непрерывный оператор задачи сопряжения

Будем рассматривать подмножество непересекающихся областей D_i и подмножество ограничивающих их гладких поверхностей S_i как всюду плотное множество кусочно-однородного пространства $\mathbb{R}^3 = \sum D_i \cup \sum S_i$. В работах (Ладовский, Шестаков, 2007; Шестаков, Ладовский, 2008) показано, каким образом в рамках континуального подхода следует устранить разрыв непрерывности функции поля и функции электропроводности в окрестности контакта сопредельных сред и предложен способ вычисления прямых значений искомым функций и их производных непосредственно в точках разрыва. Кусочно-гладкое решение задачи сопряжения является обоб-

щенной функцией, заданной во всем континуальном пространстве \mathbb{R}^3 .

Для электрического потенциала $U(x_M)$ условие неразрывности тока (1) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla U) = -q. \quad (6)$$

Коэффициент электропроводности кусочно-однородной проводящей среды $\sigma(x)$ – разрывная функция. Ее значение на поверхности контакта $S_i := \{x = x_{S_i}\}$ не определено, известна лишь величина скачка в точке разрыва. Из условия непрерывности нормальных составляющих плотности тока (3) в окрестности разрыва $\sigma(x)$ следует существование правильных (по Ляпунову) лево- и правосторонних предельных значений электрического поля:

$$E_i^N \Big|_{S_i} = \frac{1}{\sigma_i} (\mathbf{N}_{S_i} \cdot \mathbf{J}),$$

$$E^N \Big|_{S_i} = \frac{1}{\sigma} (\mathbf{N}_{S_i} \cdot \mathbf{J}).$$

Их полусумма Дирихле дает прямое значение электрического поля на поверхности разрыва, их разность задает плотность простого слоя на этой поверхности:

$$(\mathbf{N}_{S_i} \cdot \mathbf{E}(x_S)) = \frac{1}{2} (E_i^N + E^N) = \frac{\partial U(x_S)}{\partial N_{S_i}},$$

$$(\mathbf{N}_{S_i} \cdot (\mathbf{E}_i - \mathbf{E})) = \frac{\partial U}{\partial N_{S_i}} - \frac{\partial U_i}{\partial N_{S_i}} =$$

$$= 2\varepsilon_i \frac{\partial U(x_S)}{\partial N_{S_i}} = v_i(S_i). \quad (7)$$

Если $\sigma(x_{S_i})$ обозначает прямое значение величины электропроводности на границе S_i , то из (7) следует «доопределение» обратной величины электропроводности на граничной поверхности разнородного электропроводного контакта:

$$\frac{1}{\sigma(x_{S_i})} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_i} + \frac{1}{\sigma} \right); \quad i = (\overline{0 \div K - 1}). \quad (8)$$

Теперь распределение обратного коэффициента разрывной электропроводности задано в каждой точке кусочно-однородной среды:

$$\frac{1}{\sigma(x)} = \begin{cases} 1/\sigma_i; & x \in D_i \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_i} + \frac{1}{\sigma} \right); & x \in S_i; \\ 1/\sigma; & x \in C\bar{D}_i \end{cases} \quad i = (\overline{0-K})$$

Если использовать символические импульсные функции для ступенчатой аппроксимации обратной электропроводности, то ее градиент будет сосредоточен исключительно на граничной поверхности контакта S_i в направлении нормали N_{S_i} (Ладовский, Шестаков, 2007).

Пусть $\{\Phi_i(x - R_i) = 0, x \in S_i\}$ – уравнения граничных поверхностей S_i в системе координат, соотнесенных с центрами звездности тел R_i . Определим функцию области посредством симметричной ступенчатой функции:

$$rI(r_i) = \begin{cases} 1, & x \in D_i, & \text{если } r_i(x - R_i) > 0 \\ \frac{1}{2}, & x \in S_i, & \text{если } r_i(x - R_i) = 0 \\ 0, & x \in \mathfrak{R}^3 / \bar{D}_i, & \text{если } r_i(x - R_i) < 0 \end{cases}$$

Градиент функции области коллинеарен вектору нормали к ее границе (Гельфанд, Шилев, 1959), а обобщенная производная ступенчатой функции равна сингулярной дельта-функции, сосредоточенной на поверхности контакта сопредельных областей (Владимиров, Жаринов, 2000). Тогда

$$\nabla H(\Phi_i) = \delta_s(\Phi_i) \otimes \nabla \Phi_i = N_{S_i} \otimes \delta_s(\Phi_i).$$

Задаваясь величиной скачка коэффициента электропроводности и его прямым значением (8) на поверхности S_i , выразим эвристический закон изменения обратной электропроводности через ступенчатые функции области кусочно-однородной среды:

$$\frac{1}{\sigma(x)} = \sum_i \left[\frac{1}{\sigma_i} + \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_i} \right) \cdot H(\Phi_i) \right]. \quad (9)$$

Сохраняя формализм вычисления обобщенной производной разрывной функции (9), запишем эквивалентный (6) линейный оператор с разрывными коэффициентами:

$$\nabla^2 U - \nabla \left(\frac{1}{\sigma(x)} \right) (\sigma \nabla U) + \frac{q(x)}{\sigma(x)} = 0.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{\sigma(x)} \right) &= \sum_i \left(\frac{1}{\sigma_i} - \frac{1}{\sigma} \right) \cdot \nabla H(r_i) = \\ &= \sum_i \left(\frac{\sigma_i - \sigma}{\sigma_i \sigma} \right) \cdot N_{S_i} \otimes \delta(r_i). \end{aligned}$$

Граничные поверхности S_i разнопроводящих контактов служат носителями дельта-функций, а их сомножителями являются непрерывные функции нормальной составляющей плотности тока. Следовательно

$$\left(N_{S_i} \cdot \sigma \nabla U \right)_{S_i} = \left(\frac{\sigma_i \sigma}{\sigma_i + \sigma} \right) \frac{\partial U(x_S)}{\partial N_{S_i}}.$$

Плотность простого слоя (7) пропорциональна прямому значению нормальной составляющей поля $E^N = -\left(N_{S_i} \cdot \nabla U \right)$ на самой граничной поверхности S_i :

$$\begin{aligned} v_i(x_S) &= \left(\frac{\sigma_i - \sigma}{\sigma_i \sigma} \right) \left(N_{S_i} \cdot \sigma \nabla U \right)_{S_i} = \\ &= 2\varepsilon_i \frac{\partial U(x_S)}{\partial N_{S_i}}. \end{aligned}$$

В классе разрывных функций уравнение (6) заменяется обобщенным лапласианом:

$$\nabla^2 U - \sum_{i=0}^{K-1} v(x_{S_i}) \delta(x - x_{S_i}) + \frac{q(x)}{\sigma(x)} = 0. \quad (10)$$

Как обобщенно непрерывный оператор, уравнение (10) является, безусловно, корректно заданным оператором не только в точках непрерывности, но и в точках разрыва обратного коэффициента электропроводности и соответствует континуальной постановке задачи сопряжения без граничных условий.

В континуальном пространстве \mathfrak{R}^3 уравнение (10) представляет собой компактную запись второй обобщенной формулы Грина для многосвязной области (Владимиров, Жаринов, 2004). В пространстве сверточных трансформант с функцией обратных расстояний, соответственно, будем иметь интегральную формулу, включающую в себя вполне непрерывный объемный потенциал источников первичного поля и « K » поверхностных потенциалов простого слоя источников с неизвестной плотностью:

$$U(x_M) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{V_C} \frac{q(x_c)}{\sigma(x_c)} \frac{1}{|x_M - x_c|} dV_C + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=0}^{K-1} \iint_{S_i} \frac{v_i(x_p)}{|x_M - x_{p_k}|} dS_{P_k} \quad (11)$$

или

$$U(x_M) = W(x_M) + \sum_{i=0}^{K-1} \Pi_i(x_M),$$

где $W(x_M) \in C^1$ – объемный потенциал класса C^1 сторонних источников первичного поля, локализованных в области $V_C \subset \mathfrak{R}^3$:

$$W(x_M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_C} \frac{q(x_c)}{\sigma(x_c)} \frac{1}{r_{MC}} dV_C, \quad x_M \in \mathfrak{R}^3, \quad x_c \in V_C;$$

$\Pi_i(x_M)$ – поверхностные потенциалы простого слоя класса C^0 вторичных источников, сосредоточенных по границам S_i раздела сред:

$$\Pi_i(x_M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_i} \frac{v_i(x_{p_i})}{r_{MP_i}} dS_{P_i}, \quad x_M \in \mathfrak{R}^3; \quad x_{p_i} \in S_i.$$

Вычисляя градиент потенциала $U(x_M)$ и проецируя текущую точку M на все поверхности S_i , приходим к компактной записи системы интегральных уравнений относительно искомых плотностей простого слоя $v_i(x_S)$:

$$v_i(x_{S_i}) = 2\varepsilon_i (\mathbf{N}_{S_i} \cdot \nabla_{S_i} U(x_{S_i})).$$

И окончательно, учитывая явный вид (11) потенциала $U(x_M)$, получаем систему интегральных уравнений Фредгольма II рода со слабо сингулярным ядром

$$\frac{v_i(x_S)}{2\varepsilon_i} = (\mathbf{N}_{S_i} \cdot \nabla_{S_i} W(x_{S_i})) - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{N}_{S_i} \cdot \nabla_{S_i}) \sum_{k=0}^{K-1} \iint_{S_k} \frac{v_k(P_k)}{|x_{S_i} - x_{P_k}|} dS_{P_k} \quad (12)$$

При $K = 1$ приходим к уже известному результату работы (Ладовский, Шестаков, 2007): аномалиеобразующее включение D_0 с проводимостью σ_0 в безграничной вмещающей среде \mathfrak{R}^3 с проводимостью σ . При $K \geq 2$ в задаче многих тел получаем

перекрестную зависимость плотностей $v_i, v_k; i, k = (\overline{0 \div K-1})$, что отражает факт взаимного влияния друг на друга контрастных по электропроводности подобластей D_i . При удачной параметризации границ многосвязной области в единой системе координат, можно получить аналитическое решение в явном виде (Ладовский, 1987, 1990). В противном случае, по формулам (11–12) можно построить ряд Неймана последовательности приближенных решений и адекватно оценить степень взаимовлияния различных по форме и физическим свойствам модельных тел.

Функция Грина для контактирующих полупространств

Если какая-либо из границ S_i представляет собою плоскость, то на ней главная часть оператора Фредгольма обращается в ноль и для неизвестной плотности v_i вместо интегрального уравнения из системы (12) будем иметь соответствующую алгебраическую формулу.

Рассмотрим модельную задачу трех тел ($K=2$), в контексте которой оценим влияние границы раздела земля – воздух на аномалию от погруженного тела (рис. 2).

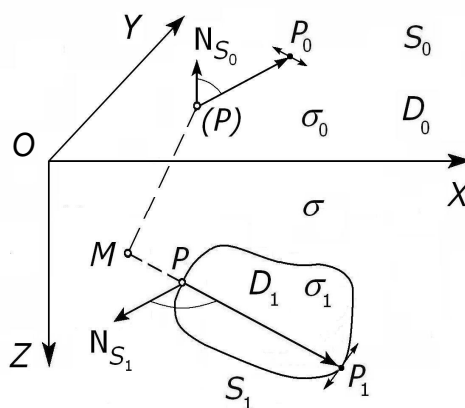


Рис. 2. Элементы проективной схемы для модели изолированного тела в полупространстве

Следуя принятой мнемонике, обозначим через D_0 – верхнее полупространство воздушной среды; $\mathfrak{R}^3 / \overline{D_0}$ – нижнее полупространство вмещающих пород; D_1 – локальный аномалиеобразующий объект. Граница S_0 – есть плоская граница раздела

земля – воздух с нормалью N_{S_1} , параллельной оси глубин. Граница S_1 – контактная поверхность тела с нормалью N_{S_0} , направленной во вмещающую среду.

Введем пространственную систему прямоугольных координат

$$(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = (x, y, z)$$

с плоскостью XOY , совпадающей с горизонтальной плоскостью раздела земля – воздух, и осью OZ , направленной по оси глубин. Из параметрического задания функций области $H(\Phi_i)$ следует, что нормаль N_{S_0} к контактной поверхности S_0 параллельна оси Z , а нормаль N_{S_1} является внешней к поверхности S_1 . Пусть точка P_0 – переменная точка (точка интегрирования) на поверхности S_0 ; точка P_1 – соответствующая точка на поверхности S_1 . Обозначим через точку P (или (P)) проективное положение точки M на поверхности контактов:

$$M \rightarrow P \in S_0 \cup S_1.$$

Тогда, если

$$r_{MP} = |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M| = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + (z_P - z_M)^2},$$

то

$$r_{PP_0} = |\mathbf{r}_{P_0} - \mathbf{r}_P| = \sqrt{(x_{P_0} - x_P)^2 + (y_{P_0} - y_P)^2 + (z_{P_0} - z_P)^2}.$$

Формула (11) решения задачи сопряжения содержит два вторичных потенциала простого слоя с плотностями v_0 и v_1 :

$$U(x_M) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{V_C} \frac{q(x_c)}{\sigma(x_c)} \frac{1}{r_{MC}} dV_C + \frac{1}{4\pi} \left(\iint_{S_0} \frac{v_0(x_{P_0})}{r_{MP_0}} dS_{P_0} + \iint_{S_1} \frac{v_1(x_{P_1})}{r_{MP_1}} dS_{P_1} \right). \quad (13)$$

Первое из двух уравнений системы (12) сводится к алгебраической формуле для v_0 при $M \rightarrow P \in S_0$, поскольку градиент об-

ратных расстояний в плоскости S_0 ортогонален к ее нормали N_{S_0} :

$$\frac{v_0(x_P)}{2\epsilon_0} = (\mathbf{N}_{S_0} \cdot \nabla_P) \times \left[W(x_P) - \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{v_1(x_{P_1})}{r_{PP_1}} dS_{P_1} \right]; \quad x_P \in S_0. \quad (14)$$

Второе уравнение для v_1 не меняется при $M \rightarrow P \in S_1$ и сохраняет структуру Фредгольмова оператора:

$$\frac{v_1(x_P)}{2\epsilon_1} = (\mathbf{N}_{S_1} \cdot \nabla_P) \left[W(x_P) - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{v_1(x_{P_1})}{r_{PP_1}} dS_{P_1} - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \frac{v_0(x_{P_0})}{r_{PP_0}} dS_{P_0} \right]; \quad x_P \in S_1. \quad (15)$$

Подставляя явное значение $v_0(x_P)$ (14) в формулу (13) для $U(x_M)$ получаем последовательность повторных интегралов по границам S_0 и S_1 . Меняя порядок интегрирования и объединяя однотипные слагаемые первичного и вторичных потенциалов, вновь приходим к стандартной форме записи решения задачи сопряжения для изолированного тела в полуограниченной среде:

$$\tilde{U}(x_M) = \tilde{W}(x_M) + \tilde{\Pi}_1(x_M)$$

Здесь $\tilde{W}(x_M)$ – «нормальный» потенциал двухслойного разреза, невозмущенный полем локального тела, но строго учитывающий влияние границы раздела земля – воздух:

$$\tilde{W}(x_M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_C} q(C) G(M, C) dV_C, \quad (16)$$

$\tilde{\Pi}_1(x_M)$ – поверхностный потенциал простого слоя вторичных источников на границе S_1 в полупространстве $\mathfrak{R}^3 / \bar{D}_0$:

$$\tilde{\Pi}(x_M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} v(x_{P_1}) G(M, P_1) dS_{P_1}. \quad (17)$$

Уравнение (15) для плотности простого слоя в полупространстве $\tilde{v}_1(x_P)$ также трансформируется к стандартной форме оператора Фредгольма с интегрированием по уединенной поверхности S_1 :

$$M \rightarrow P \in S_1: \frac{\tilde{v}(x_P)}{2\varepsilon_1} = (\mathbf{N}_{S_1} \cdot \nabla_P) \times \left[\tilde{W}(x_P) - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \tilde{v}(x_{P_1}) G(P, P_1) dS_{P_1} \right]. \quad (18)$$

Следует отметить, что формулы (16)–(18) по своей структуре аналогичны известному формализованному результату для изолированного тела в безграничной среде (Ладовский, Шестаков, 2007) с той лишь разницей, что в качестве ядра интегрального оператора везде вместо функции обратных расстояний $(r_{MP})^{-1}$ используется функция $G(M, P)$:

$$G(M, P) = \frac{1}{r_{MP}} - \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \iint_{S_0} \frac{dS_{P_0}}{r_{MP_0}} \cdot (\mathbf{N}_{S_0} \cdot \nabla_{P_0}) \left(\frac{1}{r_{P_0P}} \right). \quad (19)$$

Функция $G(M, P)$ выражается через интеграл – свертку по границе полупространства S_0 и по существу является функцией Грина для двух контактирующих полупространств. Конечный скачок электропроводности в плоскости контакта учитывается параметром электропроводной контрастности ε_0 :

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0 + \sigma} = \begin{cases} -1, & \sigma_0 = 0 \\ 0, & \sigma_0 = \sigma \\ +1, & \sigma_0 \rightarrow \infty \end{cases}$$

Параметр ε_0 в такой форме записи унифицирует все возможные случаи постановки граничных задач для стационарных электрических (электропроводность $\sigma_0 = 0$, $\varepsilon_0 = -1$), магнитных (магнитная восприимчивость $\sigma_0 = \sigma$, $\varepsilon_0 = 0$) и тепловых полей (теплопроводность $\sigma_0 \rightarrow \infty$, $\varepsilon_0 = 1$) в полупространстве с непроводящей, немагнитной и изотермической границей физических моделей полубесконечных сред.

Учет границы раздела земля – воздух

Для вычисления сверточного интеграла (19) для функции Грина $G(M, P)$ по бесконечной плоскости

$$S_0 := \{z_{P_0} = 0; x_{P_0}, y_{P_0} \in (-\infty, +\infty)\}$$

воспользуемся очевидным тождеством:

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}_{S_0} \cdot \nabla_{P_0}) \left(\frac{1}{r_{P_0P}} \right) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial z_{P_0}} \left(\frac{1}{r_{P_0P}} \right) = -\frac{\partial}{\partial z_P} \left(\frac{1}{r_{P_0P}} \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$G(M, P) = \frac{1}{r_{MP}} - \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_P} \iint_{S_0} \frac{dS_{P_0}}{r_{MP_0} r_{PP_0}}.$$

Для плоской границы этот интеграл вычисляется в явном виде. Введем местную систему цилиндрических координат с началом в эпицентральной точке M плоскости S_0 (точка (M)) и зададим проективные координаты точки P и текущие координаты переменной точки интегрирования P_0 (рис. 3):

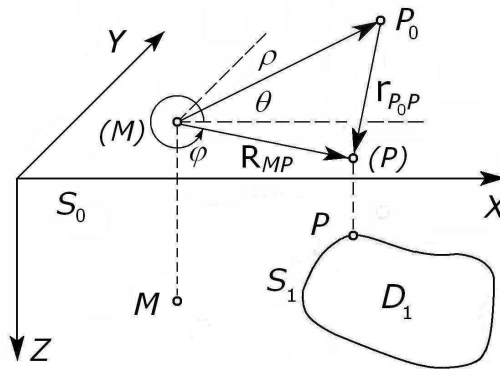


Рис. 3. К вычислению сверточного интеграла для функции Грина в цилиндрической системе координат

$M(x, y, z) = M(0, 0, z_M) := \{x_M = 0; y_M = 0; z_M\}$,
 $P(x, y, z) = P(R_{MP}, \varphi, z_P) :=$
 $= \{x_P = x_M + R_{MP} \cos \varphi; y_P = y_M + R_{MP} \sin \varphi; z_P\}$,
 $P_0(x, y, z) = P_0(\rho, \theta, 0) :=$
 $= \{x_{P_0} = x_M + \rho \cos \theta; y_{P_0} = y_M + \rho \sin \theta; z_{P_0} = 0\}$.
 Определим расстояния между этими точками:

$$r_{MP} = |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M| = \sqrt{R_{MP}^2 + (z_P - z_M)^2}, \quad (20)$$

$$r_{MP_0} = |\mathbf{r}_{P_0} - \mathbf{r}_M| = \sqrt{\rho^2 + z_M^2},$$

$$r_{PP_0} = |\mathbf{r}_{P_0} - \mathbf{r}_P| = \sqrt{(\rho^2 - 2\rho R_{MP} \cos(\theta - \varphi) + R_{MP}^2) + z_P^2}. \quad (21)$$

Функция $G(M, P)$ в системе цилиндрических координат имеет вид:

$$G(M, P) = \frac{1}{r_{MP}} - \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_P} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{r_{MP_0}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r_{PP_0}}.$$

Выразим обратное расстояние (21) через Бесселев интеграл от J_0 (Грэй, Мэтьюз, 1953):

$$\frac{1}{r_{PP_0}} = \int_0^\infty e^{-\lambda|z_P|} \times J_0\left(\lambda\sqrt{\rho^2 - 2\rho R_{MP} \cos(\theta - \varphi) + R_{MP}^2}\right) d\lambda.$$

Но по теореме сложения Неймана (Грэй, Мэтьюз, 1953):

$$J_0\left(\lambda\sqrt{\rho^2 - 2\rho R_{MP} \cos(\theta - \varphi) + R_{MP}^2}\right) = J_0(\lambda\rho)J_0(\lambda R_{MP}) + 2\sum_{k=1}^\infty J_k(\lambda\rho)J_k(\lambda R_{MP}) \cos k(\theta - \varphi).$$

И, в силу ортогональности $\cos k(\theta - \varphi)$ на отрезке $[0, 2\pi]$, получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{r_{PP_0}} \frac{d\theta}{r_{PP_0}} = J_0(\lambda\rho)J_0(\lambda R_{MP}).$$

В результате вычисления интегралов

$$G(M, P) = \frac{1}{r_{MP}} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z_P} \int_0^\infty e^{-\lambda|z_P|} J_0(\lambda R_{MP}) d\lambda \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\lambda\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z_M^2}} = \frac{1}{r_{MP}} - \varepsilon_0 \cdot \text{Sign}(z_P) \int_0^\infty e^{-\lambda(|z_P| + |z_M|)} J_0(\lambda R_{MP}) d\lambda = \frac{1}{r_{MP}} - \frac{\varepsilon_0 \cdot \text{Sign}(z_P)}{\sqrt{R_{MP}^2 + (|z_P| + |z_M|)^2}}.$$

С учетом (20) запишем функцию Грина в симметричном виде, удобном для последующего анализа:

$$G(M, P) = \frac{1}{\sqrt{R_{MP}^2 + (z_P - z_M)^2}} - \frac{\varepsilon_0 \text{Sign}(z_P)}{\sqrt{R_{MP}^2 + (|z_P| + |z_M|)^2}}. \quad (22)$$

Зависимость $G(M, P)$ от функций модуля и сигнатуры обобщает все возможные случаи расположения точек источника и точек наблюдения поля и приводит к интересным методическим следствиям.

Удвоение потенциала

Следствие 1. Пусть $P=C$ точка источника, расположенного непосредственно над границей полупространства; M – точка измерения, лежащая ниже этой границы:

$$z_M = 0 + 0; \quad z_C = 0 - 0,$$

$$G(M, C) = G(+0, -0) = \frac{1}{|R_{MP}|} (1 + \varepsilon_0).$$

Потенциал поля пропорционален функции Грина (22). У поверхности контакта он:

- равен нулю под непроводящей границей (задача геоэлектрики, $\varepsilon_0 = -1$);
- непрерывен под немагнитной границей (задача магнитометрии, $\varepsilon_0 = 0$);
- удваивается под изотермической плоскостью (задача геотермики, $\varepsilon_0 = +1$).

Следствие 2. При инвертировании точки источника и точки наблюдения для значений потенциала наблюдается обратная зависимость:

$$z_M = 0 - 0; \quad z_C = 0 + 0,$$

$$G(M, C) = G(-0, +0) = \frac{1}{|R_{MP}|} (1 - \varepsilon_0).$$

Над поверхностью контакта потенциал:

- удваивается в задачах геоэлектрики, $\varepsilon_0 = -1$;
- не меняется в задачах магнитометрии, $\varepsilon_0 = 0$;
- равен нулю в задачах геотермики, $\varepsilon_0 = +1$.

Удвоение напряженности поля

В рассматриваемой модельной постановке напряженность поля пропорциональна градиенту функции Грина. Пусть точка наблюдения поля M находится непосредственно под граничной плоскостью $z_M = 0 + 0$; точка источника C расположена произвольно. Вычисляя градиент функции Грина (22), получаем:

$$\nabla_{x,y,z}G(+0, z_C) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x_C - x_M)}{(R_{MC}^2 + z_C^2)^{3/2}} (1 - \varepsilon_0 \text{Sign}(z_C)) \\ \frac{(y_C - y_M)}{(R_{MC}^2 + z_C^2)^{3/2}} (1 - \varepsilon_0 \text{Sign}(z_C)) \\ \frac{z_C}{(R_{MC}^2 + z_C^2)^{3/2}} (1 + \varepsilon_0 \text{Sign}(z_C)) \end{array} \right\}.$$

И здесь также просматриваются два следствия.

Следствие 3. Источник расположен под границей раздела $z_C = 0 + 0$. В задачах геоэлектрики ($\varepsilon_0 = -1$) тангенциальная составляющая поля удваивается, а нормальная обращается в ноль. В задачах магнитометрии ($\varepsilon_0 = 0$) граница не оказывает влияния на магнитное поле. В задачах геотермии ($\varepsilon_0 = +1$) тангенциальная составляющая геотермического градиента равна нулю, а нормальная составляющая удваивается по сравнению с моделью безграничной среды.

Следствие 4. Возбуждение поля в нижнем полупространстве стационарным источником выше граничной плоскости ($z_C = 0 - 0$) сильнее проявляется в вертикальной компоненте для хорошо проводящей среды ($\sigma \gg \sigma_0, \varepsilon_0 \rightarrow -1$) и в горизонтальной компоненте – для среды со слабой электропроводностью ($\sigma \ll \sigma_0, \varepsilon_0 \rightarrow +1$).

Таким образом, правильно выбранная стратегия континуального подхода к решению задач сопряжения для моделей кусочно-однородных сред (граничных задач с условиями IV рода) позволяет получить простую аналитическую конструкцию для плоских элементов граничных поверхностей, выделить в явном виде и устранить скрытые особенности полученных решений, изучить методические вопросы и, в конечном итоге, построить унифицированный алгоритм вычисления стационарных геофизических полей в неоднородных средах.

Выводы

1. Построен обобщенно-непрерывный дифференциальный оператор, описывающий распределение потенциала стационарных геофизических полей, возбуждаемых в кусочно-однородных средах, в произвольной точке пространства, включая контактные границы раздела сопредельных областей с различными значениями материальных параметров.

2. Получена система интегральных уравнений относительно плотности эквивалентных источников простого слоя, наведенных на контактных поверхностях, дающих возможность в явном виде учесть эффект взаимного влияния аномалиеобразующих объектов для задачи многих тел.

3. Выделен класс контактных поверхностей, для которых возможно построить алгоритм получения решения с учетом последовательного учета возмущений первичного поля на основе редукции системы интегральных уравнений.

4. Получена функция Грина для полупространства в унифицированной форме записи, обобщающей различные случаи расположения точек источника и точек наблюдения для стационарных электрического, магнитного и теплового полей с учетом их физических особенностей.

Литература

- Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000. 400 с.
- Воскобойников Г.М. О вычислении стационарных электромагнитных полей в некоторых кусочно-однородных средах // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1973. № 9. С. 63-75.
- Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959. 470 с.
- Грей Э, Мэтьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: изд-во иностранной литературы, 1949. 386 с.
- Гуревич Ю.М. Магнитное поле тока, стекающего с точечного источника в присутствии сжатого сфероида // Электроразведка в области скважин на колчеданных месторождениях Урала. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. С. 60-72.
- Гуревич Ю.М. Учет влияния границы земля – воздух при вычислении магнитных полей токов // Электроразведка методом заряда с изменением напряженности маг-

нитного поля. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979. С. 78-86.

Ладовский И.В. Применение метода изображений для расчета геотермических аномалий от погруженных тел // Ядерно-геофизические и геотермические исследования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 73-80.

Ладовский И.В. Об аналитическом решении потенциальных краевых задач в кусочно-однородных средах // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 5. С. 35-46.

Ладовский И.В., Шестаков А.Ф. Об аппроксимации разрывных коэффициентов в операторе краевой задачи линейного сопряжения // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Мат-лы 34-й сессии Межд. науч. семинара им. Д.Г. Успенского. М.: ИФЗ РАН, 2007. С. 160-164.

Мартышко П.С. Некоторые вопросы теории и алгоритмы решения задач метода искусственного подмагничивания. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. 32 с.

Мартышко П.С. Обратные задачи электромагнитных геофизических полей. Екатеринбург: УрО РАН, 1996. 144 с.

Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Москва-Ленинград: «ОНТИ», 1937. 998 с.

Халфин Л.А. Поле точечного источника в присутствии сжатого и вытянутого сфероидов // Изв. АН СССР, сер. геофиз. 1956. № 6. С. 657-668.

Цирульский А.В. К теории метода искусственного подмагничивания в двумерном случае // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1974. № 9. С. 70-77.

Цирульский А.В. К вопросу о решении прямой задачи электроразведки // Электроразведка в области скважин на колчеданных месторождениях Урала. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. С. 89-96.

Цирульский А.В., Мартышко П.С. Об учете размагничивающего эффекта в задачах магниторазведки // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1979. № 3. С. 49-56.

Шестаков А.Ф., Ладовский И.В. О решении граничных задач для электрического потенциала с учетом криволинейной поверхности раздела двух сред // Мат-лы Межд. конф. «Геофизические исследования Урала и сопредельных регионов». Екатеринбург: ИГФ УрО РАН, 2008. С. 309-313.