

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

Миндубаев М.Г. – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

Аннотация. Проведено численное исследование влияния однородного вертикально направленного магнитного поля на развитие тепловой конвекции в двумерной области. При численном моделировании использовался метод конечных разностей. Граничные условия на горизонтальных границах области для скорости принимались твёрдыми. Исследования проводились в зависимости от различных значений безразмерных параметров, начальных условий и размеров области. Получены установившиеся колебательные и квазистационарные режимы.

RESEARCH OF ELECTRICALLY-CONDUCTING LIQUID CONVECTION IN TWO-DIMENSIONAL AREAS

Mindubaev M.G. – Institute of geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

Abstract. Numerical research of influence of the homogeneous vertically directed magnetic field on development of thermal convection in two-dimensional domain was carried out. The method of finite differences was used in numerical experiments. Boundary conditions at horizontal domain boundaries for quickness were accepted. Researches were conducted depending on various values of dimensionless parameters, entry conditions and the sizes of domain. Established oscillation and quasistationary regimes were received.

Введение

Вопрос происхождения и генерации магнитного поля Земли является одним из фундаментальных в проблемах о Земле. В настоящее время для объяснения особенностей проявления магнитного поля Земли используется теория гидромагнитного динамо. Этот же подход применяется для изучения природы магнитных полей для звёзд, включая Солнце, планет гигантов, межзвёздной среды, галактик. Качественно механизм генерации магнитного поля Земли схож с тем, что служит для объяснения магнитного поля Солнца, в отношении которого за последнее время проведено достаточно много численных исследований и накоплен большой наблюдательный материал. В крупномасштабном магнитном поле небесных тел выделяют две составляющие: полоидальную, в виде поля магнитного диполя, ось которого близка к оси вращения, а также тороидальную. Так как мантия по электропроводности по сравнению с ядром ведёт себя как изолятор, то тороидальная составляющая магнитного поля Земли практически полностью локализована в жидком высокоэлектропроводящем внешнем ядре Земли. Предложены и механизмы генерации этих составляющих, которые связаны с быстрым неоднородным вращением (ω -эффект) и действием спи-

ральности (α -эффект) (Roberts, 1988). Не останавливаясь на деталях различиях механизмов генерации в условиях Солнца и Земли, связанных с размерами объектов, физическими параметрами среды, скоростью вращения, отметим, что существенное различие связано с типом граничных условий. С математической точки зрения использование свободных граничных условий, применяемых в моделировании генерации магнитного поля Солнца, несколько проще, в отличие от применения твёрдых граничных условий, которые необходимы для постановки краевой задачи уравнений магнитной гидродинамики в условиях внешнего ядра Земли. Обычно в работах как по исследованию устойчивости, так и численному моделированию развитой конвекции используется приближение свободных границ (Weiss et al., 2004). В последнее время большие усилия в решении уравнений магнитной гидродинамики в применении к условиям во внешнем ядре Земли, связаны с разработкой численных методов и уточнением физических моделей (A numerical ..., 2001). Благодаря развитию вычислительной техники, за последние полтора десятка лет появились полные 3D модели, описывающие генерацию магнитного поля Земли. Эти модели отличаются широким разнообразием выбора значений

безразмерных параметров, часто плохо соответствующим реальным условиям во внешнем ядре Земли (Kono, Roberts, 2002). Эти различия связаны, во-первых, с достигнутой точностью оценки физических параметров среды. Для магнитной вязкости общепринятые оценки получены с использованием закона Видемана-Франца, тогда как для кинематической вязкости эти оценки отличаются на несколько порядков (Джекобс, 1979; Lumb, Aldridge, 1991). Во-вторых, – это вычислительные трудности, связанные с выбором значений безразмерных параметров при членах со старшими производными.

В работе исследуется развитая тепловая конвекция невращающейся несжимаемой жидкости в двумерной области, находящейся в однородном вертикальном магнитном поле для различных значений безразмерных параметров, начальных условий и размеров прямоугольной области. Подобная постановка задачи использовалась в исследовании конвекции в применении к условиям на Солнце (Weiss, 1981), где используются свободные граничные условия. В настоящей работе исследуется данная модель для твердых границ, которые физически более точно отражают условия для контакта внешнего ядра Земли с твердой мантией и внутренним ядром.

Уравнения и граничные условия

Уравнения конвекции в приближении Буссинеска для скорости \mathbf{u} , температуры T и магнитного поля \mathbf{B} выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{g} (T - T_0) + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \Delta T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)],$$

уравнения 1–4 представляют собой систему (I), где

ν – кинематическая вязкость;
 α – коэффициент теплового расширения;
 \mathbf{g} – вектор ускорения свободного падения;
 T_0 – равновесное распределение температуры,
 $\mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{B}$ – электрический ток;
 κ – коэффициент теплопроводности;
 h – коэффициент магнитной вязкости;
 ρ и ρ_0 – плотность и равновесное распределение плотности.

Для того чтобы исключить градиент давления в системе (I), возьмем rot от уравнения (1). Далее переходим к новым переменным для скорости \mathbf{u} – функции тока ψ и функции вихря ω , а для магнитного поля \mathbf{B} вводим функцию магнитного потенциала A , так что

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad \mathbf{B} = \left(-\frac{\partial A}{\partial z}, 0, \frac{\partial A}{\partial x} \right).$$

Выбирая в качестве единиц измерения: для длины – размер слоя L ; времени – L^2/κ ; скорости – κ/L ; температуры – βL ; магнитного поля – B_0 , получаем следующую систему (II) нелинейных уравнений 5–8 для безразмерных переменных (Weiss, 1981):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = \text{Pr} \Delta \omega - \text{Pr} Ra \frac{\partial T}{\partial x} - \text{Pr} \zeta Q J(A, \Delta A), \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + J(\psi, T) = \Delta T, \quad (6)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + J(\psi, A) = \zeta \Delta A, \quad (7)$$

$$\omega = -\Delta \psi, \quad (8)$$

где $J(f, g) = (\partial f / \partial x)(\partial g / \partial z) - (\partial f / \partial z)(\partial g / \partial x)$ – якобиан. Безразмерные параметры:

$\text{Pr} = \frac{\kappa}{\nu}$ – число Прандтля;

$\text{Pr}_m = \frac{\kappa}{\eta}$ – магнитное число Прандтля;

$Ra = \frac{g \alpha \beta L^4}{\kappa \nu}$ – число Рэлея, β – градиент тем-

пературы; $Q = \frac{B_0^2 L^2}{\mu_0 \rho_0 \eta \nu}$ – число Chandrasekara,

$$\zeta = \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_m} = \frac{\eta}{\kappa}.$$

Рассматривается конвекция в ограниченной области ($0 < x < \lambda$; $0 < z < 1$) в однородном направленном вертикально вверх по оси z магнитном поле B_0 .

Мы принимаем, что нижняя и верхняя границы слоя являются изотермическими, а на боковых границах отсутствует тепловой поток:

$$T = 1 \quad z = 0; \quad T = 0 \quad z = 1,$$

где λ – аспектное отношение. $\lambda = L/H$ показывает отношение горизонтальных линейных размеров области L к вертикальным H .

Граничные условия для остальных переменных таковы. Для векторного потенциала магнитного поля A :

$$A = 0 \quad x = 0, \quad A = \lambda \quad x = \lambda;$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad z = 0, 1.$$

Для функций тока ψ и вихря ω принято:

$$\psi = \omega = 0 \quad x = 0, \lambda \quad z = 0, 1$$

На горизонтальных границах принимаются различные граничные условия.

Твердые границы:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \tag{9}$$

и свободные границы:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \tag{10}$$

Уравнения 9 и 10 представляют собой систему (III).

Численный метод и результаты моделирования

Для численного исследования системы уравнений (II) использована консервативная, монотонная неявная разностная схема, обеспечивающая второй порядок аппроксимации $O(h^2, \tau^2)$ по пространственным и временной координатам (Берковский, Ноготов, 1976). Использовалась равномерная пространственная сетка с шагом $1/50$. В

начальный момент времени в центральных областях квадратных ячеек задавались возмущения для функции вихря ω . Для соседних ячеек эти значения задавались одинаковыми по величине, но с чередующимися знаками. Результаты сопоставлялись с численными результатами, полученными в работе (Weiss, 1981) для модели с одной конвективной ячейкой для свободных границ при различных параметрах чисел Pr , Pr_m , ζ и Q . Получено удовлетворительное соответствие. В частности при невысокой закритичности ($\text{Ra} \sim 3 \div 6 \cdot 10^3$) при различных значениях $\zeta = 0,025, 0,05, 0,1, 0,5$ и $\zeta Q = 100$ (данное соотношение показывает, учитывая выражения для Pr_m и Q , что рассматриваются магнитные поля с равными B_0), получены установившиеся колебательные режимы с обращением направления движения в ячейке.

Свободные граничные условия (9) на горизонтальных границах, как отмечалось выше, характерны для описания конвекции на Солнце. Для условий конвекции во внешнем ядре Земли необходимо задать на горизонтальных границах условие (10). Качественное различие в типе граничных условий для ψ в сравнительно небольших магнитных полях заключается в том, что при одних и тех же значениях числа Ra и других параметров, при свободных граничных условиях, конвекция развивается более интенсивно. Это объясняется тем, что для твёрдых границ, благодаря большему градиенту скорости, у границ образуются вихри, создавая дополнительное трение (рис. 1). Боковые граничные условия во всех расчётах принимались свободными.

В численных моделях число Прандтля в большинстве расчётов принималось $\text{Pr} = 1$, что соответствует оценкам для Pr в условиях внешнего ядра Земли (Roberts, Glatzmaier, 2000). В работе используется влияние величины внешнего магнитного поля B_0 и магнитной вязкости на развитие тепловой конвекции ($\zeta = 0,1; 1; 10; 30; \zeta Q = 10^2, 10^3$ и 10^4). А также рассматриваются численные решения при трёх значениях $\text{Ra} = 10^4, 2 \cdot 10^4, 10^5$. Эти значения чисел Рэлея значительно превышают порог закри-

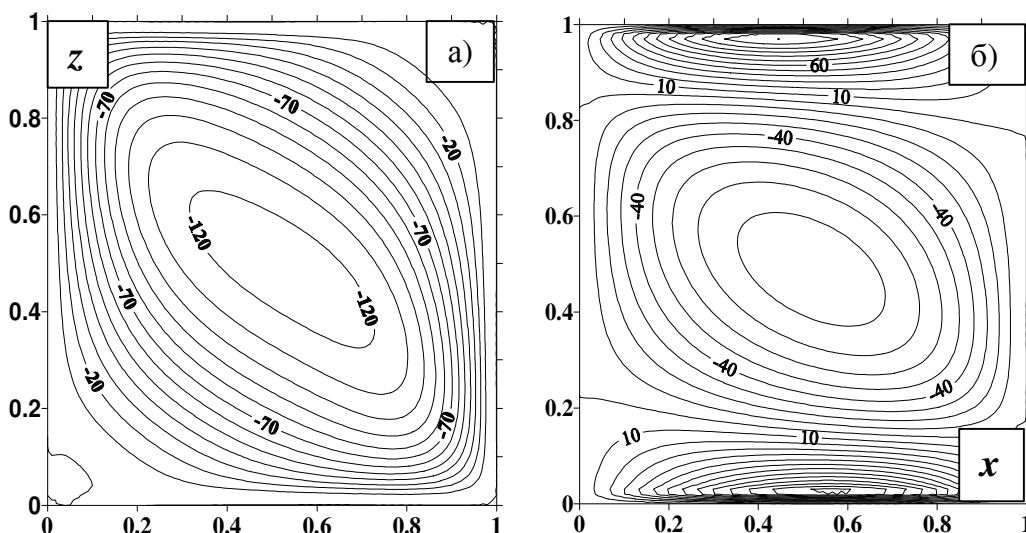


Рис. 1. Различия в изолиниях функции вихря ω для установившихся стационарных режимов при $Ra=5000$ для случая свободных границ (а) и твёрдых границ (б). По осям – безразмерные координаты, см. стр. 3

точности для тепловой конвекции в бесконечном слое жидкости с твёрдыми горизонтальными границами без магнитного поля ($Ra_{кр} \approx 1708$).

Получены численные решения развитой конвекции в отсутствие магнитного поля для принятых выше значений числа Ra и $Pr=1$. На рис. 2а представлены изолинии функции тока ψ для $Ra=2 \cdot 10^4$. При значениях безразмерного времени $\hat{t} > 1,3$ решение распадается.

Особенность данного решения – это более мощные как по размерам, так и по интенсивности ячейки с отрицательными значениями функции тока ψ по сравнению с положительными. Характер решений не зависит от перемены знака в начальных значениях функции вихря. На рис. 2б представлены решения для $Ra=10^4$ и $\hat{t}=3,2$. Иной характер течений получен для $Ra=2 \cdot 10^4$ при $Pr=0,1$ и $Pr=10$. В первом случае, когда существенен вклад от инер-

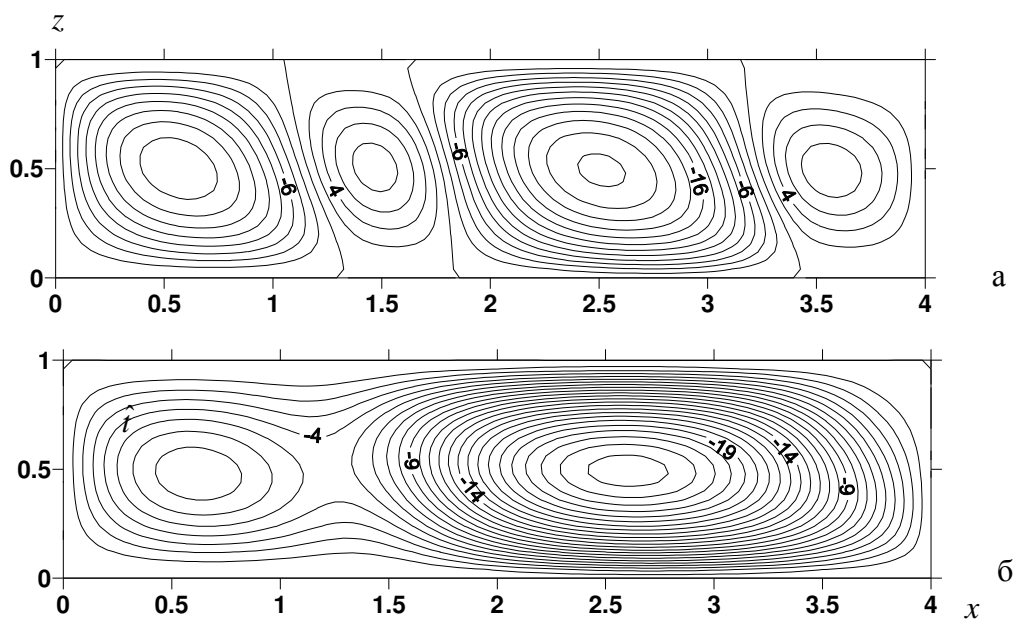


Рис. 2. Изолинии функции тока ψ для тепловой конвекции без магнитного поля при $\hat{t}=1,3$; $Ra=2 \cdot 10^4$, $Pr=1$ и $\hat{t}=3,2$; $Ra=10^4$, $Pr=1$, соответственно (а) и (б). Обозначения осей то же, что рис. 1

циальных источников (члены в левой части уравнения (5) при $\hat{t} = 1,3$, ячейки с различным направлением течений сравнимы между собой по интенсивности и размерам. Во втором случае, когда характер течений качественно обусловлен значениями числа Рэлея, при соизмеримых по размерам ячейках различной направленности, ячейки с положительными значениями функции тока существенно превышают по интенсивности отрицательные.

Случай $Ra=10^4, 2 \cdot 10^4$. На рис. 3 пред-

ставлены изолинии функции тока ψ для конвекции в однородном вертикальном магнитном поле в различные моменты времени. Малое значение параметра $\zeta=0,1$, что соответствует достаточно высокой электропроводности и замороженности магнитного поля в поток проводящей жидкости (7), и сравнительно небольшое внешнее магнитное поле, характеризуемое числом Чандraseкара $Q = 1000$ при $Ra=2 \cdot 10^4$, приводит к установлению колебательного режима. Данный режим характеризуется тем, что в

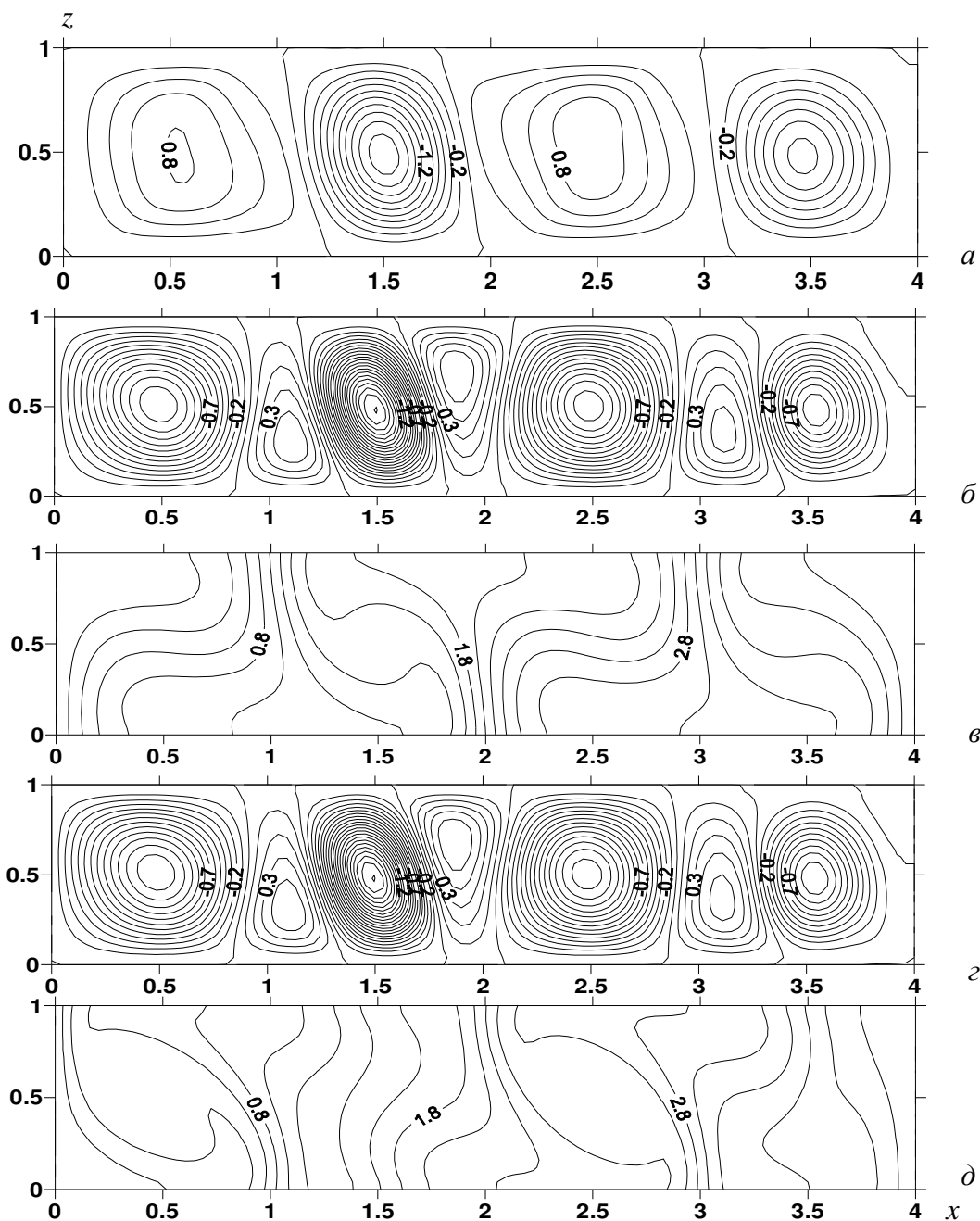


Рис. 3. $Ra=2 \cdot 10^4, \zeta=0,1$ и $\zeta Q=100$. Изолинии функции тока ψ в различные моменты времени: $\hat{t} = 1,8$ (а), $\hat{t} = 2,1$ (в), $\hat{t} = 2,5$ (г). Изолинии потенциала магнитного поля A при $\hat{t} = 1,8$ (б) и $\hat{t} = 2,5$ (д)

конвективных ячейках с течением времени происходит обращение направления движения. В переходный период происходит деформирование размеров конвективных ячеек, приводящее к увеличению одних и сжатию других с последующим увеличением количества ячеек рис. 3в. В дальнейшем количество уменьшается до начальных четырех, но уже с обратным знаком. Качественно эффект вмороженности силовых линий магнитного поля в поток высокоэлектропроводящей жидкости представлен на рис. 3б и рис. 3д. На этих рисунках видно, что при смене направления движения в ячейках меняется и структура вмороженности магнитного поля. При тех же значениях ζ и Q , но при недостаточно высоком числе Рэлея $Ra=10^4$, также устанавливается колебательный режим, но значительно менее интенсивный и с меньшим периодом обращения движения.

Качественно иное решение получается при $Ra=10^4$, $\zeta=1$ и $\zeta Q=100$. На достаточно больших временах устанавливается квазистационарный (пульсирующий) режим (рис. 4а). Данный режим характеризуется тем, что в таком установившемся режиме

интенсивность течений, а вследствие этого и размеры соседних ячеек попеременно изменяются, приводя к некоторому увеличению одних и соответственно уменьшению других. Причём, если в начальных значениях функции вихря задать большие значения или задать возмущения в чётных (нечётных) ячейках, то на близких временах получается режим схожий с представленным на рис.4(а). Если же задать начальные возмущения только в одной квадратной ячейке, то устанавливается квазистационарный режим, но уже с пятью вихрями. При тех же параметрах, но с $Ra=2 \cdot 10^4$, реализуется режим, представленный на рис. 4б и 4в с дальнейшим распадом на временах $\hat{t} > 4$. При этом видно, что на характер решений влияет размеры области. Чем больше отношение $\lambda:1$, тем меньше влияние вертикальных границ на характер течений. Для многих примеров рассчитывались задачи, как в области 4:1, так и в 8:1. В тех задачах, в которых устанавливается квазистационарный или колебательный режимы (изолинии функции тока ψ в этих режимах являются достаточно симметричными относительно центра ячеек),

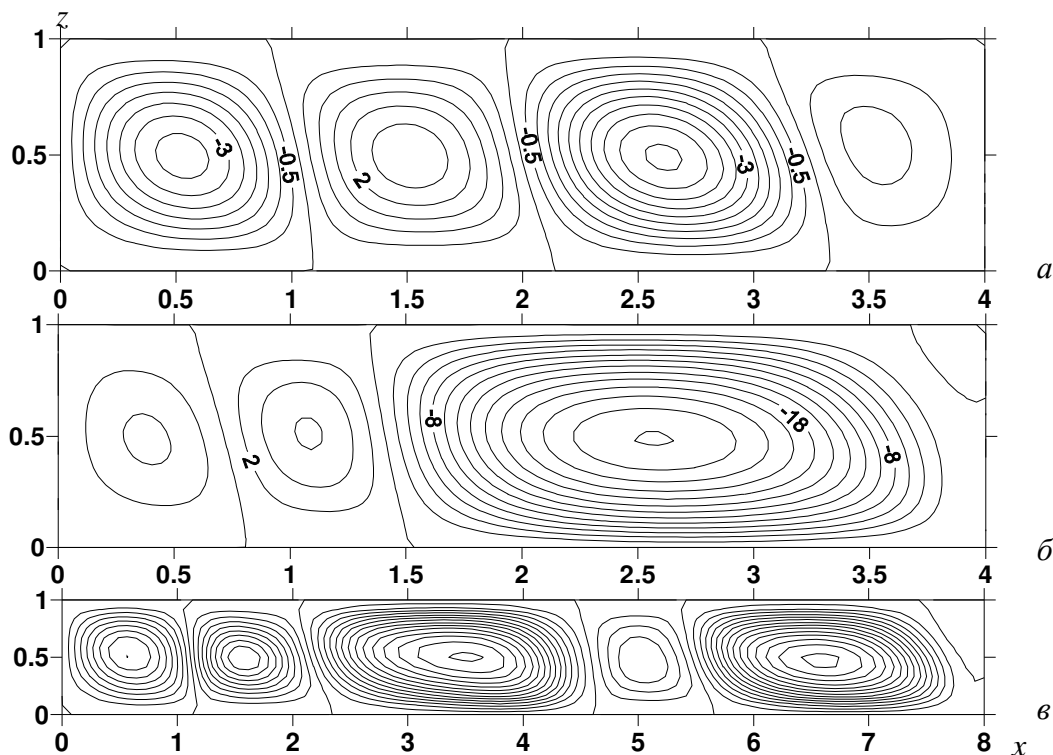


Рис. 4. $\zeta=1$ и $\zeta Q=100$. Изолинии функции тока ψ в момент времени $\hat{t}=6$ при $Ra=10^4$ (а); $\hat{t}=4$, $Ra=2 \cdot 10^4$ (б). На 4в тоже, что и 4б в области 8:1

размеры области не столь существенны. В тех же задачах, где решения несимметричны, влияние граничных условий на решения становятся существенными, и в различных по размерам областях при одних и тех же параметрах и начальных условиях реализуются различные пространственные структуры.

При $\zeta=10$, $Q=10$, соответствующий сравнительно малым полям и плохой вмороженности силовых линий, реализуется режим близкий к представленному на рис. 2, для развитой конвекции без магнитного поля.

Иной характер решений получен для $\zeta Q=1000$, соответствующий большому значению магнитного поля B_0 . Для случая вмороженного поля $\zeta=0,1$ происходит дробление масштабов, и образуются вихри, вытянутые в горизонтальном направлении рис. 5а. Качественно такой результат следует из линейной теории конвективной устойчивости, когда с увеличением числа Чандрасекара минимальные критические значения чисел Рэлея $Ra_{кр}$ соответствуют более мелкомасштабной конвекции. Для $\zeta=1$, $Q=1000$ достаточно высокое магнитное поле стабилизирует конвекцию (движение полностью исчезает). Для значений параметров $\zeta=10$, $Q=100$ устанавливается квазистационарный режим рис. 5б.

Случай $Ra=10^5$. Случай $Ra=10^5$ соответствует более высокоинтенсивной конвекции по сравнению с рассмотренными выше. При малых значениях произведения ζQ структура течений в основном определяется значением числа Рэлея, и получаются решения близкие к тем, что получены для конвекции без магнитного поля. Для сравнительно невысоких значений магнитного поля ($\zeta Q=1000$), определяющую роль в балансе сил уравнения (5) вносят архимедовы силы. При большой диффузии магнитного поля ($\zeta=10$) линии магнитного поля слабо вморожены в поток, и решения соответствуют тем, что получены для развитой конвекции без магнитного поля. На характерных временах порядка $\hat{t}=1$, решения распадаются. Действие же сил Лоренца при этом уже достаточно велико, и вносит иерархичность в течения. Для $\zeta=0,1$; 1 влияние боковых граничных условий на течение велико. Это проявляется при рассмотрении решений в областях 4:1 и 8:1. На близких временах получаются качественно различные решения рис. 6, 7.

Для $\zeta=10$, $Q=1000$ устанавливается колебательный режим. Для случая $\zeta=30$, $Q=1000$, который при равном числе Чандрасекара Q соответствует большим магнитным полям B_0 , устанавливается квазистационарный режим. Для последнего слу-

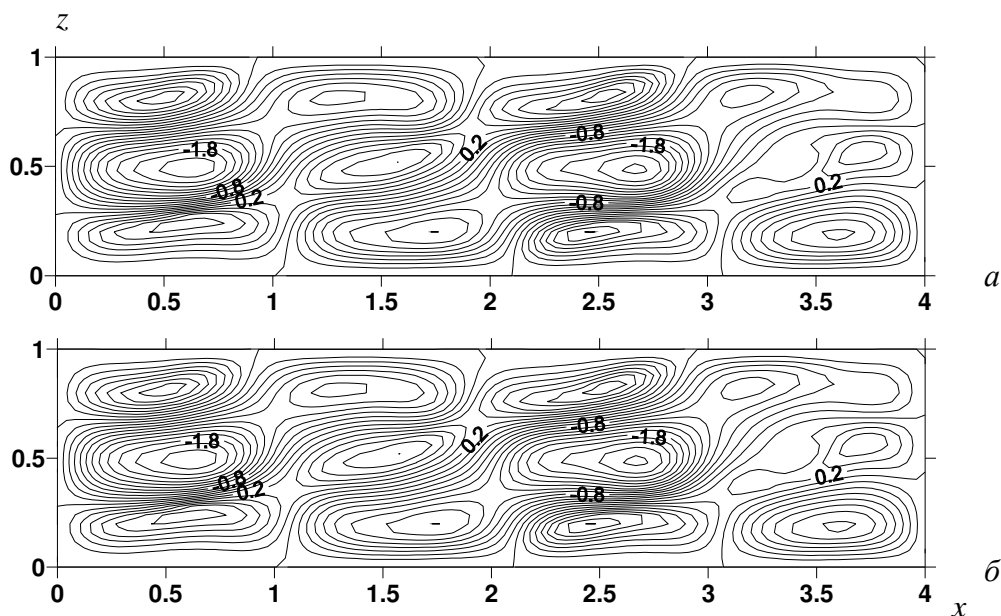


Рис. 5. $Ra=2 \cdot 10^4$, $\zeta=0,1$, $Q=10000$. Изолинии функции тока ψ в момент времени $\hat{t}=1,5$ (а). $Ra=2 \cdot 10^4$, $\zeta=10$, $Q=100$ – квазистационарный режим (б)

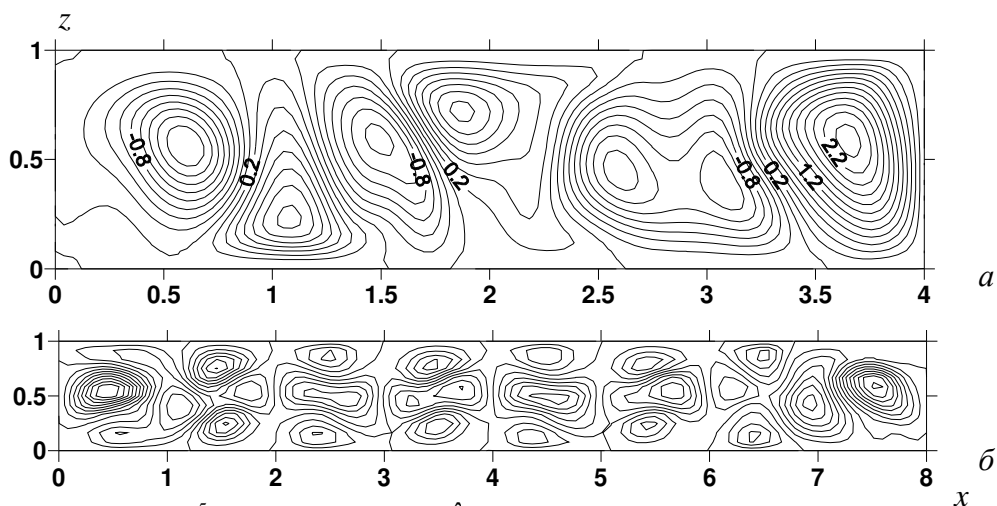


Рис. 6. $Ra=10^5$, $\zeta=0,1$, $Q=10000$, $\hat{t}=1$. Изолинии функции тока ψ в области 4:1 (а); в области 8:1 (б)

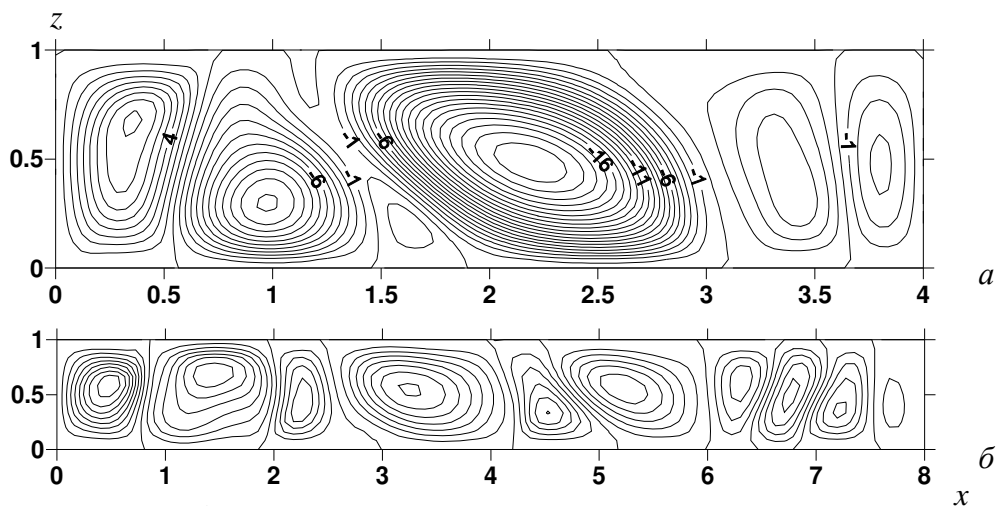


Рис. 7. $Ra=10^5$, $\zeta=1$, $Q=1000$, $\hat{t}=1,5$. Изолинии функции тока ψ в области 4:1 (а); в области 8:1 (б)

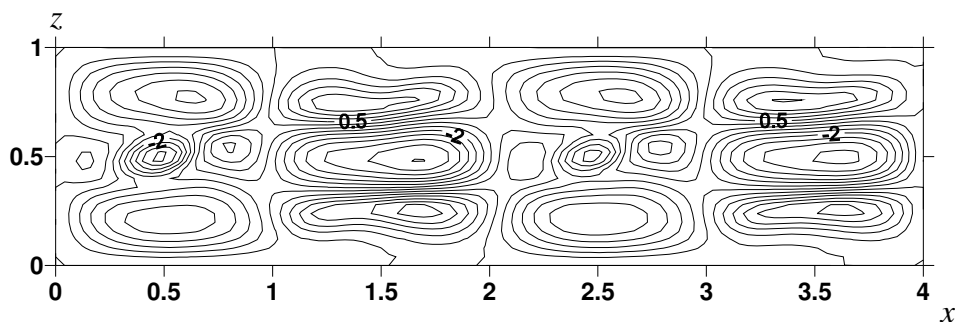


Рис. 8. $Ra=10^5$, $\zeta=1$, $Q=10000$, $\hat{t}=0,4$. Изолинии функции тока ψ

чая параметров также рассматривалось установление в зависимости от различного числа начальных конвективных ячеек четырех и восьми. Получены качественно различные пространственные распределения установившихся квазистационарных режимов рис. 9. При этом количество конвектив-

ных ячеек в обоих случаях равно восьми.

Также рассматривались решения для $Ra=10^6$. Для этих значений числа Рэлея получены колебательные режимы при высоких значениях параметра $\zeta=30$. При значениях $\zeta < 10$, уже на малых временах, которые значительно меньше характерного

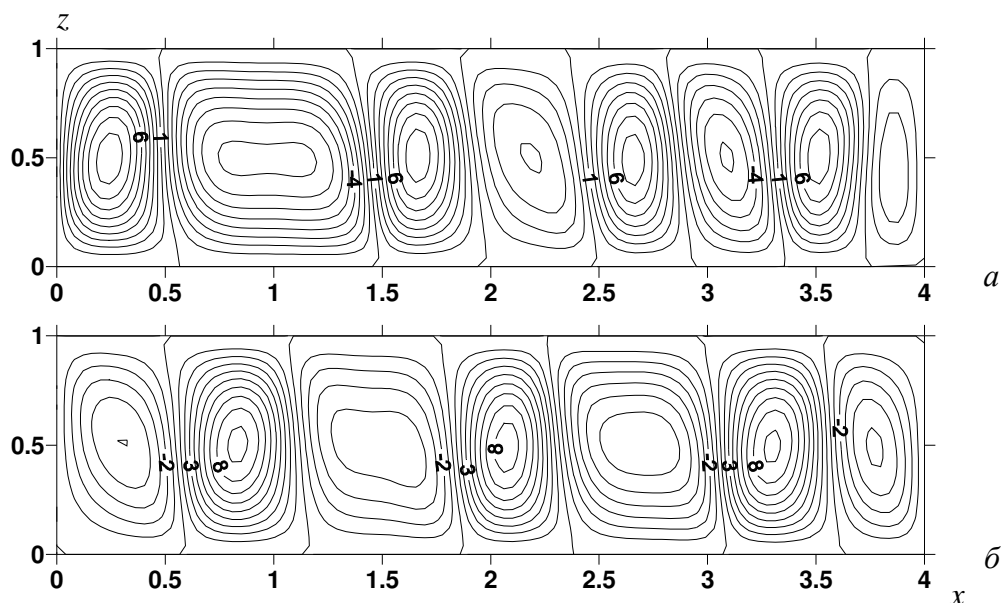


Рис. 9. $Ra=10^5$, $\zeta=30$, $Q=1000$. Изолинии квазистационарного режима функций тока ψ с четырьмя начальными ячейками (а) и с восьмью начальными ячейками (б)

времени, происходит масштабирование конвективных ячеек, сходное с представленными на рис. 5а и 8, но уже с большим числом ячеек. Также следует отметить, что результаты численного моделирования не меняются, если вектор индукции магнитного поля \mathbf{B} имеет противоположенное направление.

Заключение

В данной работе нами исследовано влияние магнитного поля на развитие конвекции в двумерной области в зависимости от значения безразмерных параметров чисел Ra , Pr , Pr_m , ζ , Q , различных начальных условий, типа условий для скорости на горизонтальных границах и размеров области. Система уравнений (II)–(III) нелинейна, поэтому выбор значений безразмерных параметров является существенным. Рассматриваемые в данной работе значения числа Рэлея $2 \cdot 10^4 \div 10^5$ соответствуют высокоинтенсивной конвекции. Решения для тепловой конвекции без магнитного поля на временах порядка $\hat{t} = 1$ (в единицах характерного времени диффузии температурного поля L^2/κ) и меньше распадаются. В нашей задаче при характерных размерах области 1000 км и $Pr=Pr_m=1$, уже сравнительно небольшое магнитное поле $B_0 \sim 10^{-5} \div 10^{-6}$ Тл оказывает стабилизирующее влияние. В

зависимости от параметра ζ получены установившиеся колебательные и квазистационарные режимы с временами значительно превышающие характерное время. Также для некоторых примеров, в которых устанавливался квазистационарный режим, рассчитывались задачи и со свободными горизонтальными границами. В частности, для значений параметров $Ra=2 \cdot 10^4$, $\zeta=10$, $Q=100$ в области 8:1 был получен колебательный режим. Это, в свою очередь, показывает, что учёт твердых горизонтальных границ, при одних и тех же значениях безразмерных параметров при достаточно высокой закрытости, обеспечивает более устойчивое решение по сравнению со свободными границами.

Учёт размеров области и начальных возмущений качественно не влияет на характер решений, но влияет на пространственное распределение в установившихся режимах. В областях с большим аспектным отношением λ , где меньше влияние боковых границ, решения более упорядочены и симметричны.

Из ряда полученных решений для нас в первую очередь представляют интерес колебательные и квазистационарные режимы конвекции в магнитном поле. Такие

режимы могут быть ответственными за процессы изменения главного магнитного поля Земли, проявлениями которого служат инверсии, вековые вариации, западный дрейф дипольного поля и др.

Автор благодарит профессора Хачая Ю.В. за постановку задачи и обсуждение результатов.

Литература

Берковский Б.Н., Ноготов Е.Ф. Разностные схемы исследования задач теплообмена. Минск: Наука и техника, 1976. 142 с.

Гершуни Г.Э., Жуховицкий Г.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.

Джекобс Дж. Земное ядро. М: Мир, 1979. 305 с.

A numerical dynamo benchmark / Christensen U.R., Aubert J., Cardin P. et al. // *Physics of the Earth and planetary interiors*, 2001. V. 128. P. 25–34.

Dormy E., Valet J.-P., Courtillot V. Numerical models of the geodynamo and observational constraints // *Geochem.*

Geophys. Geosyst, 2000. 1. paper number 2000G000062.

Kono M., Roberts P.H. Recent Geodynamo Simulations and simulations of the geomagnetic field // *Reviews of Geophysics*, 2002. V. 40. No. 4. P. 1–54.

Lumb L.I., Aldridge K.D. On viscosity estimates for the Earth's fluid outer and core-mantle coupling // *J. geomagnetism and geoelectricity*, 1991. V. 43. No. 2. P. 93–110.

Roberts P.H. Future of geodynamo theory // *Geoph. Astroph. Fluid Dyn.*, 1988. V. 44. P. 3–33.

Roberts P.H., Glatzmaier G.A. Geodynamo theory and simulations // *Reviews of Modern Physics*, 2000. V. 72. №4. P. 1081–1123.

Weiss N.O. Convection in an imposed magnetic field. Part 1. The development of nonlinear convection // *Journal Fluid mechanics*, 1981. V. 108. P. 247–272.

Weiss N. O., Thomas J. H., Brummell N., Tobias S. The origin of penumbral structure in sunspots: downward pumping of magnetic flux // *The Astrophysical Journal*, 2004. V. 600. P. 1073–1090.