МЕТОД СИММЕТРИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Ладовский И.В, Мартышко П.С. – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург.

Аннотация. Граничные задачи логарифмического потенциала для моделей кусочно-однородных сред относятся к классу задач линейного сопряжения кусочно-аналитических функций. Простой слой на границе контакта сопредельных областей удовлетворяет уравнению Коши с вещественно заданным оператором. Для замкнутого К-параметризованного аналитического контура это уравнение эквивалентно краевой задаче Римана – Гильберта для круга. Подпространство решений на функциях пар симметрий однолистных функций реализуется формулой Коши.

THE METHOD OF SYMMETRIES FOR INTEGRAL EQUATION OF CONJUGATION PROBLEM WITH REAL OPERATOR

Ladovsky I.V., Martyshko P.S. – Institute of Geophysics, UB of RAS, Yekaterinburg

Abstract. Boundary –value problems of logarithmic potential for piecewise homogeneous media models belong to the problem class of linear conjugation of piecewise-analytical functions. A simple layer at the boundary of adjoining area contact satisfies the Cauchy equation with real predetermined operator. For closed K-parametrized analytical loop this equation is equivalent to Riemann-Gilbert boundary-value problem for a circle. The subspace of solutions based on functions of symmetries' pairs of single-sheet function is realized by the Cauchy function.

1. Введение

В работе [8] приведена интегральная формула решения прямой задачи сопряжения стационарных тепловых полей для изолированного тела в однородной среде. Граничные условия сопряжения трансформируются в интегральное уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью. Для двумерных моделей получена замкнутая форма решения задачи с применением аппарата интегралов типа Коши для кусочно-аналитических функций. Конструктивным элементом предлагаемого подхода является представление комплекснозначного оператора нормальной производной на регулярно аналитическом контуре $L: \bar{z} = f(z)$, заданного в форме Цирульского

$$\mathrm{N}_z^L = 2\left(\frac{\partial}{\partial z} - f_z' \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\Bigg|_{\bar{z} = f(z)} \qquad (1)$$

Действие этого оператора позволяет определить:

- комплексную плотность простого слоя на аналитическом контуре L двумерного тела:

$$\chi(z) = N_z^L(T(z, \bar{z})) = 2\left(\frac{\partial T}{\partial z} - f_z' \frac{\partial T}{\partial \bar{z}}\right)\Bigg|_{\bar{z} = f(z)} \qquad (2)$$

- комплексное ядро интеграла Пуассона в формуле прямой задачи:

$$\mathrm{K}(z_s, w) = \mathrm{N}_z^L\left(ln\frac{1}{|z-w|}\right) = \left(\frac{1}{w - z_s} - \frac{f_z'}{\bar{w} - \bar{z}_s}\right)\Bigg|_{\bar{z} = f(z)} \qquad (3)$$

- плотность простого слоя первичного поля источников:

$$\chi_0(z_s) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R^2/L} \frac{Q(u,v)}{\lambda(u,v)} \mathrm{K}(z_s, w)\, du\, dv \qquad (4)$$

Интегральная формула решения прямой задачи записывается в виде суммы первичного поля тепловых источников и вторичного поля простого слоя с неизвестной плотностью:

$$g(z,\bar{z}) = g_0(z,\bar{z}) - \frac{\varepsilon}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\chi(w)dw}{w-z}$$
$$g_0(z,\bar{z}) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R^2/L} \frac{Q(u,v)}{\lambda(u,v)}\frac{du\,dv}{(w-z)} \qquad (5)$$

Граничное условие сопряжения внутреннего и внешнего поля приводит к интегральному уравнению относительно неизвестной плотности простого слоя:

$$\chi(z_s) + \frac{\varepsilon}{2\pi i}\int\limits_L \chi(w_s)\mathrm{K}(z_s,w_s) = \chi_0(z_s) \qquad (6)$$

В сингулярное ядро $\mathrm{K}(z_S,w_S)$ в качестве слагаемых входит ядро Коши и его сопряженное значение. Преобразование (6) к виду, характерному для интегрального уравнения Коши составляет предмет настоящей работы.

2. Первичное поле источниковых аномалий

В качестве первичного поля $g_0(z,\bar{z})$ геотермического разреза будем рассматривать поле заданного распределения тепловых источников, не осложненное контрастом теплопроводности аномалиеобразующего тела. Полагая в общем решении (5) $\lambda_1 = \lambda_2$ $(\varepsilon = 0)$, для комплексного температурного градиента получаем явную квадратурную формулу – интеграл Пуассона.

$$g(z,\bar{z}) = g_0(z,\bar{z}) = \frac{1}{2\pi\lambda}\iint\limits_{R^2/L}\frac{Q(u,v)}{(w-z)}du\,dv \qquad (7)$$

В кусочно-однородной среде интеграл первичного поля обобщается суммой интегралов Пуассона по областям с постоянной теплопроводностью.

Остановимся на двух типах функций модельного распределения источников теплогенерации Q, характерных для геотермических приложений. Внутри аномалиеобразующего тела (область D с теплопроводностью λ_2) избыточная мощность источников принимается постоянной; вне тела (область $C\overline{D}$ с теплопроводностью λ_1) – задаются источники внешнего однородного поля. Последние эквивалентны сингулярному источнику в бесконечно удаленной точке.

$$Q(u,v) = \begin{cases} Q_2 = const; & (u,v)\in D \\ Q_1\delta(u-u_0, v-v_0); & (u,v),\,(u_0,v_0)\in C\overline{D} \end{cases} \qquad (8)$$

Интеграл первичного поля в (5) распадается на две составляющие относительно распределения источников $g_0 = g_{01} + g_{02}$:

$$g_{01} = \frac{Q_1}{2\pi\lambda_1}\int\limits_{C\overline{D}}\frac{\delta(u-u_0)\delta(v-v_0)du\,dv}{w-z};$$
$$g_{02} = \frac{Q_2}{2\pi\lambda_2}\iint\limits_D\frac{du\,dv}{w-z};$$

Во внешности тела $z\in C\overline{D}$ обе эти функции аналитические за исключением точки $z_0=u_0+\imath v_0$ источника Q_1.

Поле сингулярного источника, локализованного в точке z_0, вычисляется прямым интегрированием:

$$g_{01}(z) = \frac{Q_1}{2\pi\lambda_1}\frac{1}{z_0 - z} \qquad (9)$$

На бесконечности порядок роста мощности источника Q_1 вытекает из теоремы Гаусса: суммарный поток q_1 через замкнутый контур, охватывающий точку z_0, остается постоянным:

$$2\pi|z-z_0|\,q_1 = Q_1.$$

Отсюда при $|z_0| >> |z|$ имеем асимптотическую формулу для плотности однородного поля глубинного теплового потока:

$$q_1 = \frac{Q_1}{2\pi|z_0|},$$

так что (9) принимает вид, характерный для комплексной напряженности внешнего однородного поля, заданного под углом θ к линии горизонта (оси x)

$$g_{01}(z) = \frac{q_1}{\lambda_1}e^{-i\theta}; \quad \theta = arg(z_0) \qquad (10)$$

Аномальное внешнее поле от внутренних источников выражается через известную формулу для комплексной напряженности логарифмического потенциала [11]. Если $\bar{w} = f(w)$ К-уравнение кривой в комплексных координатах с особенностями правой части $f(w)$ внутри D, то [10, 12]

$$g_{02}(z) = \frac{Q_2}{4\pi\lambda_2 i}\int\limits_L\frac{\bar{w}\,dw}{w-z} = \frac{Q_2}{4\pi\lambda_2 i}\int\limits_L\frac{f(w)\,dw}{w-z} = -\frac{Q_2}{2\lambda_2}\left[f(z) - f_\infty(z)\right] \qquad (11)$$

где $f_\infty(z)$ – главная часть аналитического продолжения $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Окончательная формула для комплексного геотермического градиента первичного поля источников имеет вид:

$$g_0(z) = g_{01}(z) + g_{02}(z) =$$

$$= \frac{q_1}{\lambda_1} e^{-i\theta} - \frac{Q_2}{2\lambda_2}\left[f(z) - f_\infty(z)\right]$$

3. Нормальная проекция комплексной напряженности

В интегральное уравнение для источников простого слоя входят сопряженные переменные, связанные *K*-уравнением аналитического контура *L*: [12]

$$z = z_L \in L : \bar{z} = f(z)$$

Отображение $z_L(\varsigma)$ единичной окружности в плоскости t

$$t = \varsigma \in \Gamma : \varsigma\bar{\varsigma} = 1$$

на регулярно-аналитический контур L в плоскости z позволяет реализовать операцию «комплексное сопряжение» на функциях пар симметрий относительно окружности Γ.

Пусть $z(t)$ аналитическая и однолистная функция в некоторой окрестности $t \in \Delta$ контура Γ, а при $t \to \varsigma$ непрерывно примыкает к своему граничному значению $z_L(\varsigma)$. Симметричная ей функция $z^*(t_*) = \bar{z}(1/t_*)$; $t_* \cdot \bar{t} = 1$ аналитическая и однолистная в сопряженной окрестности $t_* \in \Delta^*$ контура Γ, а при $t_* \to \varsigma$ примыкает к своему сопряженному значению $\overline{z_L(\varsigma)}$ [13]. Если пересечение $E = \Delta \cap \Delta^*;\ E \neq \varnothing$ целиком содержит в себе контур Γ, то справедливо:

<u>*Утверждение 1.*</u> Полусумма Дирихле односторонних пределов функций пар симметрий $z(t)$ и $z^*(t_*)$ в E – окрестности Γ равна вещественной части отображения $z_L(\varsigma)$. Действительно

$$\frac{1}{2}\left(z(t) + z^*(t_*)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(z(t) + \bar{z}\left(\frac{1}{t_*}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z(t) + \bar{z}(\bar{t})\right)$$

Откуда

$$Re\, z_L(\varsigma) = \lim_{t\to\varsigma} \frac{z(t) + z^*(t_*)}{2}. \qquad (12)$$

<u>*Утверждение 2.*</u> В *E*-окрестности контура Γ функции пар симметрий удовлетворяют *K*-уравнению кривой *L*:

$$z^*(t_*) = f(z(t));\ t_*\bar{t} = 1$$

Производная правой части этого уравнения на Γ отлична от нуля и равна отношению производных функций пар симметрий. Действительно

$$z^*(t_*) = \bar{z}\left(\frac{1}{t_*}\right) = \bar{z}(\bar{t}) = f(z(t))$$

Дифференцируя обе части полученного равенства по t, найдем производную сложной аналитической функции $f_z'(z(t))$:

$$\frac{\partial z^*(t_*)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}.$$

В силу однолистности $z(t);\ (z_t' \neq 0)$

$$f_z'(z(t)) = \frac{1}{z_t'}\frac{\partial z^*(t_*)}{\partial t}$$

но

$$\frac{\partial z^*(t_*)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{z}(1/t_*)}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial \bar{z}(\bar{t})}{\partial t} = \frac{\partial \overline{z(t)}}{\partial \bar{t}}\cdot\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = \overline{z_t'}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right) = -\overline{z_t'}\cdot\frac{\overline{t_*}}{t}$$

Поскольку существуют лево- и правосторонние пределы производных функций пар симметрий на Γ, то при $t \to \varsigma + 0;\ t_* \to \varsigma - 0$ имеем

$$f_z'(z(\varsigma)) = f_z'(z(t)) = -\frac{\overline{z_t' \cdot t}}{z_t' \cdot t};\ t \to \varsigma \in \Gamma \quad (13)$$

Корректное определение производной (13) правой части K-уравнения кривой L в *E*-окрестности контура Γ позволяет сопоставить комплекснозначный оператор (1) нормальной производной $N_z^L(.)$ на плоскости z и его прообраз $N_t^\Gamma(.)$ на плоскости t:

$$N_t^\Gamma = 2\left(\frac{\partial}{\partial z} - f_z'\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\Bigg|_{\overline{z(t)} = f(z(t))} =$$

$$= \frac{2}{z_t'\cdot t}\left(\frac{\partial}{\partial z} z_t'\cdot t + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\overline{z_t'\cdot t}\right) = \frac{2}{z_t'\cdot t}\mathrm{Re}\left\{t\cdot 2\frac{\partial}{\partial t}\right\} \qquad (14)$$

Вещественную часть t-производной (14) на окружности Γ, вычисленную как предел отношения производных пар симметрий, назовем оператором «нормальной проекции» на Г.

<u>*Утверждение 3.*</u> При отображении $L \Rightarrow \Gamma$ уравнение граничной задачи для источников простого слоя сводится к особому интегральному уравнению типа Коши с вещественно заданным оператором.

Действительно, проектируя функцию (2) с контура L на окружность Г, получаем:

$$\chi\big(z(t)\big) = \mathrm{N}_t^{\Gamma}\big(T(t)\big) = \frac{2}{z_t' \cdot t}\gamma(t); \quad t = \varsigma \in \Gamma\ ,$$

где $\quad \gamma(t) = Re\left\{t \cdot 2\dfrac{\partial T}{\partial t}\right\} = Re\ \{t\, z_t'\, g(\,z(t))\}$

Аналогично преобразуется первичное поле источников:

$$\chi_0\big(z(t)\big) = \mathrm{N}_t^{\Gamma}\big(T_0(t)\big) = \frac{2}{z_t' \cdot t}\gamma_0(t); \quad t = \varsigma \in \Gamma\ ,$$

где $\gamma_0(t) = Re\left\{t \cdot 2\dfrac{\partial T_0}{\partial t}\right\} = Re\ \{t\, z_t'\, g_0(\,z(t)\}$

и, соответственно, ядро (3) интегрального оператора

$$\mathrm{K}\big(z(t) - w\big) = \mathrm{N}_t^{\Gamma}\left(\ln\frac{1}{|z(t) - w|}\right) =$$

$$= \frac{2}{t \cdot z_t'}\ \mathrm{Re}\left\{\frac{t \cdot z_t'}{w - z(t)}\right\};\ t = \varsigma \in \Gamma$$

Таким образом, на контуре $t = \varsigma$ единичной окружности Г вспомогательной плоскости t имеем особое интегральное уравнение с вещественно заданным оператором:

$$\gamma(\varsigma) + \frac{\varepsilon}{\pi i} Re\int_{\Gamma}\gamma(\tau)\frac{z_t'}{w(\tau) - z(\varsigma)}\cdot\frac{\varsigma}{\tau}d\tau = \gamma_0(\varsigma)\ . \quad (15)$$

Для однолистной функции подстановки $z(\varsigma)\,(\,z_t' \neq 0)$ порядок нуля знаменателя в ядре интегрального оператора (15) не меньше единицы

$$w(\tau) = z(\varsigma) + z_t'(\tau - \varsigma) + ...$$

$$\frac{z_t'}{w(\tau) - z(\varsigma)}\cdot\frac{\varsigma}{\tau} \sim \frac{1}{(\tau - \varsigma)\cdot[1 + O(\tau - \varsigma)]}$$

Сингулярность интегрального уравнения (15) связана с вещественной частью ядра Коши в переменных τ и $t = \varsigma$. Но характеристическое неоднородное уравнение с ядром Коши безусловно разрешимо. Более того, в классе автоморфных ядер (при условии их аналитичности) с первым порядком сингулярности даже полное интегральное уравнение разрешимо в конечном виде [2]. Оператор Re предполагает выполнение операции «комплексное сопряжение». Сопряженные ветви ядра Коши в t-плоскости строятся по методу симметрий. Аналоги формул Сохоцкого решают поставленную задачу.

4. Координаты эллипса и формула решения прямой задачи

Контур эллипса является одним из тестовых примеров регулярно аналитический кривой, изоморфной единичной окружности. Функция отображения $z(t)$ – рациональная функция с изолированными полюсами в нуле и бесконечно удаленной точке. Кроме того, для эллипса известно явное аналитическое представление комплексной напряженности внешнего гравитационного и магнитного потенциалов в задачах гравии- и магнитометрии [1, 12]; известно также и комплексное представление для индуцируемых аномалий в однородном внешнем подмагничивающем поле (задача МИП в постановке 1) [7].

Пусть $D \subset R^2$ – эллипс с полуосями a и b $(a > b)$; L – его граница:

$$L\ :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

К-уравнение границы эллипса в комплексных координатах:

$$\bar{z} = f(z) = \frac{(a^2 + b^2)\,z - 2\,a\,b\sqrt{z^2 - c^2}}{c^2};$$

$$z = z_L \in L$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – линейный эксцентриситет эллипса; $2c$ – его фокальный отрезок.

Рациональная функция $z_L(\varsigma)$ отображает единичную окружность $\Gamma\ : \varsigma \cdot \bar{\varsigma} = 1$ на контур L, сохраняя направление обхода

$$z_L(\varsigma) = R\left(\varsigma + \frac{\alpha}{\varsigma}\right)\!;\ R = \frac{a+b}{2} > 0,\ \alpha = \frac{a-b}{a+b} < 1 \quad (16)$$

Построим функции пар симметрий. Аналитическая функция

$$z(t) = R\left(t + \frac{\alpha}{t}\right)$$

конформно отображает кольцо $\Delta : \sqrt{\alpha} < |\,t\,| < \infty$ плоскости t на внешность фокального отрезка эллипса плоскости z, сохраняя неподвижной бесконечно удаленную точку. Симметричная ей функция

$$z^*(t_*) = f(z(t)) = R\left(\frac{1}{t_*} + \alpha t_*\right); \quad t_* \cdot \bar{t} = 1$$

антиконформно отображает кольцо $\Delta^*: 0 < |t_*| < 1/\sqrt{\alpha}$ на те же внешние точки плоскости z, инвертируя ноль в бесконечно удаленную точку. Каждая из однолистных функций пар симметрий задает в плоскости z эллиптическую сетку координат с линией особенностей, совпадающей с фокальным отрезком эллипса. Аналитическая E-окрестность пар симметрий – кольцо $E: \sqrt{\alpha} < t < 1/\sqrt{\alpha}$ покрывает конформно эквивалентную область плоскости z, целиком содержащую в себе контур L.

В интегральной формуле (5) решения прямой задачи сделаем замену переменных:

$$z = z(t);\; w = w(\tau);\; \chi(w(\tau)) = \frac{2}{\tau \cdot w'_\tau}\gamma(\tau)$$

и перейдем к системе криволинейных координат эллипса.

$$g(z(t)) = g_0(z(t)) - \frac{\varepsilon}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)}{w(\tau) - z(t)}\frac{d\tau}{\tau}; \quad \sqrt{\alpha} < t < \infty$$

Аномальная часть комплексной напряженности $g - g_0$ – аналитическая вне Г функция переменной $t \neq \tau$. На самой окружности имеем особый интеграл. Выделяя главную часть особенности ядра интегрального оператора в области однолистности $z(t)$, получаем:

$$\frac{1}{w(\tau) - z(t)} = \frac{\tau}{t \cdot z'_t}\left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - \frac{\alpha}{t}}\right)$$

$$z'_t = R\left(1 - \frac{\alpha}{t^2}\right) \qquad (17)$$

Таким образом, интеграл типа Коши с вещественной плотностью $\gamma(\tau)$ решает прямую задачу сопряжения кусочно-аналитических функций в системе t- координат эллипса:

$$g(z(t)) = g_0(z(t)) -$$

$$-\frac{\varepsilon}{t \cdot z'_t}\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \gamma(\tau)\left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - \frac{\alpha}{t}}\right)d\tau \qquad (18)$$

Здесь необходимо отметить следующее. В формуле (17) интеграл берется по замкнутому контуру, ограничивающему область однолистности $z(t)$ внешней или внутренней краевой задачи. При $1 < |t| < \infty$ получаем регулярное решение во внешности эллипса с нулем не ниже $1^{\text{го}}$ порядка в бесконечно удаленной точке. При $\sqrt{\alpha} < |t| < 1$ имеем решение внутренней задачи. Естественное граничное условие – отсутствие потока за контуром фокального отрезка эллипса [5] обращает в ноль плотность простого слоя $\gamma(t)$ на круге $|t| = \sqrt{\alpha}$. Таким образом, каждая из ветвей кусочно-аналитической функции (17) непрерывно примыкает к своим односторонним граничным значениям. Сопряжение ветвей на окружности $\Gamma: t = \varsigma$ контролируется величиной плотности простого слоя $\gamma(\varsigma)$ из уравнения (15). Но, согласно (12) и (17), в E-окрестности Г допустимо представление особого ядра в виде суммы его главной и регулярной части:

$$\operatorname{Re}\frac{t \cdot z'_t}{\tau \cdot (w(\tau) - z(t))} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - \frac{\alpha}{t}}\right); \quad t = \varsigma \in \Gamma$$

Следовательно, искомая плотность простого слоя, уточняющая формулу прямой задачи в t-координатах эллипса, является вещественной частью решения полного интегрального уравнения Коши:

$$\gamma(\varsigma) + \varepsilon\, Re\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \gamma(\tau)\left(\frac{1}{\tau - \varsigma} - \frac{1}{\tau - \frac{\alpha}{\varsigma}}\right)d\tau = \gamma_0(\varsigma) \quad (19)$$

Полное интегральное уравнение Коши с постоянными коэффициентами разрешимо в конечном виде при условии аналитичности его регулярной части [2]. Для особого уравнения (19) с вещественным оператором данное условие не выполнимо. Однако сохраняется возможность свести наше уравнение к аналогу задачи Римана – Гильберта для сопряженных на Г значений граничных функций [2, 9].

5. Задача Римана – Гильберта

Двустороннее условие задачи Римана предполагает линейную связь на контуре L между значениями граничных функций, аналитических в сопредельных областях. В условиях задачи Гильберта задается вещественная часть линейной комбинации односторонних граничных значений аналитической функции в области [2]. В уравнении простого слоя (19) задачи сопряжения интегрирование ведется по единичной окружности Г. Вещественная часть интегрального оператора связывает граничные значения кусочно-аналитической функции (18) $g(z(t))$ вне и внутри единичного круга.

Изящная трансформация условий задачи Гильберта для круга к условиям задачи Римана с применением метода симметрий выполнена И.И. Мусхелишвили [9]. Реализация операции комплексного сопряжения на функциях пар симметрий приводится и для уравнения (19) граничной задачи сопряжения.

Продолжим вещественную функцию комплексного переменного $\gamma(\varsigma)$ с окружности Г на всю плоскость переменного t при помощи кусочно-аналитической функции $\Phi(t)$:

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau-t}; \quad \begin{matrix}\Phi(\infty)=0\\ |\Phi(0)|<\infty\end{matrix}, \tag{20}$$

где, как обычно, две ветви $\Phi^{+}(t), \Phi^{-}(t)$ аналитические внутри и вне единичного круга. Их односторонние граничные значения на $\Gamma: t=\varsigma$ связаны формулами Сохоцкого:

$$\begin{aligned}&\Phi^{+}(\varsigma)+\Phi^{-}(\varsigma)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau-\varsigma};\\ &\Phi^{+}(\varsigma)-\Phi^{-}(\varsigma)=\gamma(\varsigma)\end{aligned} \tag{21}$$

Плотность $\gamma(\varsigma)$ на окружности Г выражается через разность двух функций, аналитических в сопредельных областях. Следовательно, интеграл в решении прямой задачи (18) можно вычислить по формуле Коши:

$$g(z(t))=g_0(z(t))-$$
$$-\frac{2\varepsilon}{t\cdot z'_t}\times\begin{cases}\Phi^{-}(t)-\Phi^{+}(\alpha/t); & 1<|t|<\infty\\ \Phi^{+}(t)-\Phi^{+}(\alpha/t); & \sqrt{\alpha}<|t|<1\end{cases} \tag{22}$$

В решении (22) разница между комплексной напряженностью внутреннего и внешнего поля усматривается непосредственно. Необходимо лишь указать соответствие внешних и внутренних точек плоскости $\langle z\rangle$ точкам переменной α/t в плоскости $\langle t\rangle$.

Образы точек переменной $t\in(\sqrt{\alpha},\infty)$ принадлежат первому листу Римановой поверхности над плоскостью $\langle z\rangle$; образы точек переменной $\alpha/t\in(0,\sqrt{\alpha})$ лежат на втором листе. Внешность эллипса $1<|t|<\infty$ первого листа соответствует его же внешности $0<\alpha/|t|<\alpha$ на втором листе; внутренность эллипса на первом листе $\sqrt{\alpha}<|t|<1$ также соответствует его внутренности $\alpha<\alpha/|t|<\sqrt{\alpha}$ в смысле второго листа Римановой поверхности $t(z)$.

На окружности $\Gamma: t=\varsigma; |\varsigma|=1$ функция $\Phi^{+}(\alpha/t)$ непрерывна. Скачок функции $\Phi(\varsigma)$ связан уравнением простого слоя (19). По формулам Сохоцкого (21) интегральное уравнение (19) для $\gamma(\varsigma)$ преобразуется в задачу линейного сопряжения для кусочно-аналитической функции $\Phi(t);\ t\to\varsigma\pm 0, \varsigma\in\Gamma$:

$$\begin{aligned}&(1+\varepsilon)\left(\Phi^{+}(\varsigma)-\Phi^{-}(\varsigma)\right)+\\ &+2\varepsilon\, Re\left\{\Phi^{-}(\varsigma)-\Phi^{+}(\alpha/\varsigma)\right\}=\gamma_0(\varsigma)\end{aligned} \tag{23}$$

По своему типу краевая задача для $\Phi(t)$ соответствует неоднородной задаче Римана со сдвигом Карлемана с элементами граничных условий задачи Гильберта [2].

Обозначим через $t_{-}=\varsigma+0$ и $t_{+}=\varsigma-0$ предельные граничные точки, лежащие справа и слева относительно ориентированной окружности Г. Если t и t_* – точки из E-окрестности пар симметрий, то полагая в граничной задаче (23) $t=t_{-}; t_*=t_{+}$ получаем, что из всех предельных переходов $t\to\varsigma$ выбирается единственный путь по нормали к окружности Г.

Строим пары симметрий граничных функций $Re\left\{\Phi^{-}(\varsigma)\right\}$ и $Re\left\{\Phi^{+}(\alpha/\varsigma)\right\}$.

Действительно,

если $\Phi^{-}(t_{-})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau-t_{-}}$, то

$$\overline{\Phi^-(t_-)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)\overline{d\tau}}{\bar{\tau} - \bar{t}_-} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau^2\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{t_+}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau\left(1 - \frac{\tau}{t_+}\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau - t_+}$$

и $\overline{\Phi^-(\varsigma)} = \Phi(0) - \Phi^+(\varsigma)$; при $t_+, t_- = \varsigma$.

Аналогично,

если $\Phi^+\left(\frac{\alpha}{t_-}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau - \frac{\alpha}{t_-}}$, то

$$\overline{\Phi^+\left(\frac{\alpha}{t_-}\right)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)\overline{d\tau}}{\bar{\tau} - \frac{\alpha}{\bar{t}_-}} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau(1 - \alpha t_+ \tau)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau - \frac{1}{\alpha t_+}};$$

и $\overline{\Phi^+\left(\frac{\alpha}{\varsigma}\right)} = \Phi(0) - \Phi^-\left(\frac{1}{\alpha\varsigma}\right)$; при $t_+, t_- = \varsigma$.

Постоянная величина $\Phi(0)$; $|\Phi(0)| < \infty$ определяется из условия разрешимости прямой задачи [4]

$$\Phi(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau}.$$

Согласно формуле (12) *(Утверждение 1)*, полусумма пар симметрий задают вещественную часть функций контура. Следовательно, оператор «Re» исключается из задачи (23) и мы приходим к классической краевой задаче Римана со сдвигом:

$$\left[\Phi^+(\varsigma) - \varepsilon\,\Phi^+\left(\frac{\alpha}{\varsigma}\right)\right] - \left[\Phi^-(\varsigma) - \varepsilon\,\Phi^-\left(\frac{1}{\alpha\varsigma}\right)\right] = \gamma_0(\varsigma) \qquad (24)$$

При этом еще раз необходимо подчеркнуть, что задаче (24) удовлетворяют не произвольные кусочно-аналитические функции $\Phi^{\pm}(t)$, а лишь те которые «сшиваются» по направлению нормали к окружности Г.

6. Метод моментов

Частное решение задачи (22), (24) зависит от вида функции $\gamma_0(\varsigma)$, посредством которой задано первичное поле источников. Например, используя Лорановское разложение $\gamma_0(t)$ можно вычислить соответствующие моменты функций Φ^+, Φ^-.

Сопоставим кусочно-аналитической функции $\Phi(t)$ (20) ее ряд Тейлора во внутренности и внешности единичного круга:

$$\Phi^+(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n; \qquad |t| < 1$$
$$\Phi^-(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} t^{-n}; \qquad |t| > 1 \qquad (25)$$

Коэффициенты разложения C_n называются моментами функции $\Phi(t)$ относительно нуля $(n \geq 0)$ и бесконечно удаленной точки $(n \leq -1)$.

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau^{n+1}}; \qquad C_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau^{-n+1}} \qquad (26)$$

Тогда при $t = \varsigma$ по формулам Сохоцкого (21) получаем ряд Лорана для искомой плотности $\gamma(\varsigma)$:

$$\gamma(\varsigma) = \Phi^+(\varsigma) - \Phi^-(\varsigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \varsigma^n \qquad (27)$$

Если $\gamma(\varsigma)$ – Гельдеровская функция, то ее ряд Лорана (27) сходится равномерно на единичной окружности Г. Причем, в силу вещественности плотности $\gamma(\tau)$, коэффициенты (26) этого ряда удовлетворяют условию сопряжения:

$C_{-n} = \overline{C_n}$

Подставляя ряды Тейлора (25) в условие (24) задачи Римана, получаем алгебраическое уравнение относительно моментов C_n лорановского разложения функции $\gamma(\varsigma)$:

$$C_0(1-\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(C_n - \varepsilon C_{-n}\alpha^n\right)\varsigma^n + \frac{C_{-n} - \varepsilon C_n \alpha^n}{\varsigma^n}\right] = \gamma_0(\varsigma) \qquad (28)$$

и, в силу полноты рядов Лорана, величина моментов C_n будет однозначно определяться коэффициентами аналогичного разложения известной функции $\gamma_0(\varsigma)$, посредством которой задано первичное поле источников.

7. Внешние источники однородного поля

Комплексная напряженность однородного первичного поля $g_0^1(z)$, направленного под углом θ к большой оси эллипса, имеет вид (10):

$$g_{01}(z) = \frac{q_1}{\lambda_1} e^{-i\theta}$$

Переходя на t-плоскость и проектируя $g_{01}(z(t))$ на нормаль к единичной окружности Γ, получаем:

$$\gamma_{01}(\varsigma) = Re\left\{t z_t' g_{01}(z(t)\right\}\Big|_{t=\varsigma\in\Gamma} =$$

$$= \frac{q_1 R}{\lambda_1} Re\left\{\left(\varsigma - \frac{\alpha}{\varsigma}\right)e^{-i\theta}\right\};$$

но заданная на окружности вещественная часть аналитической функции (*Утверждение 1*) равна пределу полу суммы соответствующих пар симметрий в E-окрестности Γ:

$$\gamma_{01}(\xi) = \frac{q_1 R}{2\lambda_1}\left[\left(e^{-i\theta} - \alpha e^{i\theta}\right)\varsigma + \frac{\left(e^{i\theta} - \alpha e^{-i\theta}\right)}{\varsigma}\right] \quad (29)$$

Подставляя (29) в алгебраическое уравнение (28) относительно моментов C_n, находим, что только два из них отличны от нуля:

$$\begin{cases} C_n - \varepsilon\, C_{-n}\alpha^n = \dfrac{q_1 R}{2\lambda_1}\left(e^{-i\theta} - \varepsilon\, e^{i\theta}\right)\delta_{n,1} \\ C_{-n} - \varepsilon\, C_n\alpha^n = \dfrac{q_1 R}{2\lambda_1}\left(e^{i\theta} - \varepsilon\, e^{-i\theta}\right)\delta_{n,1} \end{cases}.$$

Откуда

$$C_1 = \overline{C}_{-1} = \frac{q_1 R}{2\lambda_1}\cdot\frac{\left(1-\varepsilon\alpha^2\right)e^{-i\theta} - \varepsilon(1-\varepsilon)\,e^{i\theta}}{1-\varepsilon^2\alpha^2}; \quad (30)$$

$$C_n = \overline{C}_{-n} = 0, \quad n \neq 1$$

Найденные коэффициенты полностью определяют вид кусочно-аналитической функции $\Phi(t)$ (25), решающей задачу сопряжения для эллипса во внешнем однородном поле.

8. Внутренние источники избыточной теплогенерации

Первичное поле $g_{02}(z)$ тепловых источников Q_2, однородно распределенных внутри эллипса, имеет вид (11)

$$g_{02}(z) = -\frac{Q_2}{2\lambda_2}\left[f(z) - f_\infty(z)\right] \quad ,$$

где [12]

$$f(z) = \frac{(a^2+b^2)z - 2ab\sqrt{z^2-c^2}}{c^2} \quad \text{и}$$

.

$$f_\infty(z) = \frac{a-b}{a+b} z = \alpha\, z$$

Переходим на t-плоскость,

$$z(t) = R\left(t + \frac{\alpha}{t}\right);\; R = \frac{a+b}{2} > 0, \alpha = \frac{a-b}{a+b} < 1 \quad (31)$$

и, с учетом вида функции В.К. Иванова [3]

$$z^*(t) = f(z(t)) = R\left(\frac{1}{t} + \alpha\, t\right),$$

вычисляем прообраз первичного поля внутренних источников:

$$g_{02}(z(t)) = -\frac{Q_2}{2\lambda_2}\left[z^*(t) - \alpha\, z(t)\right] =$$

$$= -\frac{Q_2 R(1-\alpha^2)}{2\lambda_2\, t} = -\frac{M_2}{2\pi R\lambda_2}\,\frac{1}{t} \quad ,$$

где $M_2 = \pi Q_2 R^2\left(1-\alpha^2\right) = \pi Q_2 ab$ – полная «тепловая масса» эллипса.

Проектируя $g_{02}(z(t))$ на нормаль к единичной окружности Γ, получаем:

$$\gamma_{02}(\varsigma) = Re\left\{t z_t' g_{02}(z(t)\right\}\Big|_{t=\varsigma\in\Gamma} =$$

$$= -\frac{M_2}{2\pi\lambda_2} Re\left(1 - \frac{\alpha}{\varsigma^2}\right) = -\frac{M_2}{2\pi\lambda_2}\left[2 - \alpha\left(\frac{1}{\varsigma^2} + \varsigma^2\right)\right] \quad (32)$$

Из уравнения (28) находим моменты C_n для плотности $\gamma_{02}(\varsigma)$:

$$\begin{cases} (1-\varepsilon)C_0 = -\dfrac{M_2}{2\pi\lambda_2} \\ C_n - \varepsilon\, C_{-n}\alpha^n = \dfrac{M_2\alpha}{4\pi\lambda_2}\delta_{n,2} \\ C_{-n} - \varepsilon\, C_n\alpha^n = \dfrac{M_2\alpha}{4\pi\lambda_2}\delta_{n,2} \end{cases}$$

Здесь уже три коэффициента разложения $\Phi(\varsigma)$ отличны от нуля. Причем, условие

$C_n = \overline{C}_{-n}$ заменяется более сильным $C_n = C_{-n}$.

$$C_0 = -\frac{M_2}{2\pi\lambda_2(1-\varepsilon)};\ C_2 = C_{-2} = \frac{M_2\alpha}{4\pi\lambda_2\left(1-\varepsilon\,\alpha^2\right)}$$

и $C_n = C_{-n} = 0, \quad n \neq 0,2$ (33)

Эти коэффициенты задают вид кусочно-аналитической функции $\Phi(t)$ (25) для эллипса с постоянной плотностью источников внутренней теплогенерации.

9. Решение прямой задачи для внешности эллипса

Формула решение внешней задачи (22) содержит разность двух аналитических функции:

$$g(z(t)) = g_0(z(t)) - \frac{2\varepsilon}{z'_t \cdot t}\left[\Phi^-(t) - \Phi^+(\alpha/t)\right]$$

Но функции Φ^+ и Φ^- в соответствующих областях аналитичности представимы своими рядами Тейлора (25) с коэффициентами (30) и (33).

$$\Phi^+(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2;\ \sqrt{\alpha} < |t| < 1$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{C_{-1}}{t} - \frac{C_{-2}}{t^2};\ \ 1 < |t| < \infty$$

Вычисляем

$$\Phi^+\left(\frac{\alpha}{t}\right) = C_0 + C_1\frac{\alpha}{t} + C_2\frac{\alpha^2}{t^2};\quad 0 < \left|\frac{\alpha}{t}\right| < \alpha$$

и разность

$$\Phi^+\left(\frac{\alpha}{t}\right) - \Phi^-(t) = C_0 + \frac{C_1\alpha + C_{-1}}{t} + \frac{C_{-2} + C_2\alpha^2}{t^2}$$

Первичное поле разделено по порождаемым его источникам:

$$g_0(z(t)) = g_{01} + g_{02} = \frac{q_1}{\lambda_1}e^{-i\theta} - \frac{M_2}{2\pi R\lambda_2}\,\frac{1}{t}.$$

Соответственно разделяется и вторичное (аномальное) поле по степеням $1/t$:

$$g_1(z(t)) = \frac{q_1}{\lambda_1}e^{-i\theta} + \frac{2\varepsilon}{t\cdot z'_t}\cdot\frac{C_1\alpha + C_{-1}}{t}$$

$$g_2(z(t)) = -\frac{M_2}{2\pi R\lambda_2}\,\frac{1}{t} + \frac{2\varepsilon}{t\cdot z'_t}\cdot\left(C_0 + \frac{C_{-2} + C_2\alpha^2}{t^2}\right)$$

Подставляя явные значения коэффициентов (30), (33) и учитывая, что $C_{-1} = \overline{C}_1,\ C_{-2} = C_2$, получаем решение внешней прямой задачи сопряжения в t-координатах эллипса:

$$\begin{aligned} g_1(z(t)) &= \frac{q_1}{\lambda_1}\left(e^{-i\theta} + \frac{2\varepsilon}{t\cdot z'_t}\cdot\frac{ab}{2R}\cdot\frac{\aleph(\theta)}{t}\right) \\ g_2(z(t)) &= -\frac{M_2}{2\pi\lambda_1}\cdot\frac{1}{t\cdot z'_t}\left(1 - \frac{(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon\alpha^2}\,\frac{\alpha}{t^2}\right)\end{aligned}. \qquad (34)$$

Здесь комплексная величина $\aleph(\theta)$ обозначает аналог «тензора размагничивания» [5]

$$\aleph(\theta) = \frac{e^{i\theta} + \alpha\,\varepsilon\,e^{-i\theta}}{1-\alpha^2\varepsilon^2} = \frac{cos\theta}{1-\alpha\varepsilon} + i\,\frac{sin\theta}{1+\alpha\varepsilon}$$

и учтено, что

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\ \text{ и }\ M_2 = \pi Q_2 ab$$

В однородной безграничной среде комплексная напряженность для круга постоянной плотности пропорциональна $1/t$. Это решение является фундаментальным в теории логарифмического потенциала [13]. Следовательно, решение задачи сопряжения (34) можно представить в виде линейной комбинации фундаментального решения и его последовательных производных. И здесь просматривается прямая аналогия с задачами гравии и магнитометрии, поля которых связаны теоремой Пуассона [1].

10. Поля мультиполей в задаче сопряжения

Переход от t-координат эллипса на исходную плоскость переменного z

$$g(z) = g(z(t(z)))$$

позволяет построить компактную формулу решения задачи линейного сопряжения и разделить аномальное поле на составляющие «гравитационного» и «магнитного» типа в смысле теоремы Пуассона. Причем, имея в виду в последующем методику применения алгоритмов ТОЗ (теоретической обратной задачи логарифмического потенциала) [14], речь идет лишь о внешней прямой задаче.

Функция (31) $z(t),\ |t| > 1$ и $z'_t(\infty) > 0;$ ставит во взаимно однозначное соответствие точкам t вне единичной окружности Г точки z вне регулярно аналитического контура L. Это означает, что аналитическая функция $z(t)$ однолистна во внешности единичного круга.

Но тогда обратная функция $t(z)$ будет аналитической и однолистной во внешности эллипса и справедливо соотношение для обратной производной:

$$t'_z(z) = \left[z'_t(t(z))\right]^{-1}.$$

Пусть $1/t(z)$ – фундаментальное решение для круга, а $1/t^2(z)$ – его первая производная, взятая со знаком минус. Тогда:

$$-\frac{1}{t^2(z)} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\right) = z'_t \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{t(z)}\right). \qquad (35)$$

Из явного вида $z(t)$ для эллипса (31) следуют очевидные тождества

$$t = \frac{z(t) + t\cdot z'_t}{2R} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha}{t} = \frac{z(t) - t\cdot z'_t}{2R} \quad . \qquad (36)$$

Однолистная во внешности эллипса обратная функция $t(z);\ t(\infty) \sim z/R$ известна [12]:

$$t(z) = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4R^2\alpha}}{2R}.$$

Строим фундаментальное решение для эллипса:

$$\frac{1}{t(z)} = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4R^2\alpha}}{2R\alpha} = \\ = \frac{2R}{c^2}\left(z - \sqrt{z^2 - c^2}\right) = \frac{2R}{c}\Omega(z),$$

где $c = 2R\sqrt{\alpha} = \sqrt{a^2 - b^2}$ – линейный эксцентриситет эллипса, равный половине его фокального отрезка; $\Omega(z)$ – безразмерная комплексная напряженность потенциала, через которую выражаются все элементы решения прямой задачи (22)

$$\Omega(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - c^2}}{c} = \frac{\sqrt{z+c} - \sqrt{z-c}}{\sqrt{z+c} + \sqrt{z-c}}. \qquad (37)$$

Решение в однородном внешнем поле в виде аномалии «магнитного» типа получается непосредственной подстановкой (35) в первую из формул (34):

$$g_1(z) = \frac{q_1}{\lambda_1}\left(e^{-i\theta} - \frac{2\varepsilon\, ab}{c}\cdot \aleph(\theta)\Omega'_z(z)\right). \qquad (38)$$

Решение в поле внутренних тепловых источников содержит члены, пропорциональные $\Omega(z)$ и производной $\Omega'_z(z)$. Подставляя (36) во вторую из формул (34), и, выделяя слагаемые с $1/t(z) \sim \Omega(z)$ и $1/t^2(z) \sim \Omega'_z(z)$, получаем:

$$g_2(z) = -\frac{M_2}{2\pi\lambda_1 c}\cdot\left[k_P\,\Omega(z) - k_M\, z\,\Omega'_z(z)\right]. \qquad (39)$$

Здесь k_P и k_M – коэффициенты влияния контраста теплопроводности эллипса на поле внутренних тепловых источников. Коэффициент k_P связан с изменение эффективной «тепловой массы» тела:

$$k_P = 1 + \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon\,\alpha^2}.$$

Коэффициент k_M ответственен за составляющую «магнитного» типа, ориентированной вдоль большой оси эллипса :

$$k_M = 1 - \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon\,\alpha^2}.$$

Естественно, что без учета контраста теплопроводности ($\varepsilon = 0$) из (39) следует известное решение задачи для эллипса с постоянной плотностью:

$$g_2(z) = -\frac{M_2}{2\pi\lambda_1 c}\cdot\Omega(z) = \frac{M_2}{2\pi\lambda_1 c}\cdot\frac{\sqrt{z+c} - \sqrt{z-c}}{\sqrt{z+c} + \sqrt{z-c}} \qquad (40)$$

Полученный нами замкнутый вид решения прямой задачи в виде разложения по мультиполям первого и второго порядка, прежде всего, связан с идеализированной формой аномалиеобразующего тела (эллипсом) и сравнительно простым первичным полем внутренних и внешних тепловых источников. Кроме того, найденная формульная конструкция позволяет эффективно реализовать метод подбора при решении обратной задачи логарифмического потенциала [14]. Усложнение параметров модели повлечет и усложнение конечной формы решения, но принципиально не затронет его алгоритмической основы [15]. В этом состоит преимущество предлагаемого выше аналитического метода решения задачи линейного сопряжения для кусочно-аналитических функций.

С увеличением количества тел в модели возникает вопрос о применимости принципа суперпозиции отдельных аномалий. Для задачи в приближенной постановке 2 [6, 7] этот вопрос решается положительно. Важно лишь указать адекватные условия подобного приближения. В геотермическом разрезе таким условиям удовлетворяют слабоконтрастные по теплопроводности тела пологого залегания ($\varepsilon, \alpha \to 0$).

11. Заключение

1. Предлагаемый алгоритм сквозного счета для решения стационарной задачи сопряжения тепловых полей (равенства температур и нормальных составляющих теплового потока на границе раздела контрастных по теплопроводности сред) позволяет построить интегральную формулу решения прямой задачи, не требующей «сшивания» внутреннего и внешнего поля на границе сопредельных сред. В двумерной постановке для изолированного тела, ограниченного регулярно аналитической кривой, решение записывается в виде интеграла типа Коши с неизвестной плотностью простого слоя. Последняя находится из интегрального уравнения Коши с вещественно заданным оператором.

2. Граничные условия задачи линейного сопряжения кусочно-аналитических функций трансформируются к условиям задачи Риммана со сдвигом Карлемана. Комплексно сопряженные ветви заданной на контуре граничной функции строится по методу симметрии. Формула Коши решает поставленную задачу.

3. На примере изолированного эллипса, выделяемого в пространстве по контрасту теплопроводности и теплогенерации, построено замкнутое решение тепловой задачи и продемонстрирована возможность разделения суммарной аномалии на составляющие «гравитационного» и «магнитного» типа, связанные теоремой Пуассона.

Литература

1. *Жданов М.С.* Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М.: Наука, 1984. 326 с.

2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

3. *Иванов В.К.* О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде // ДАН СССР, 1956. Т. 106. № 4. С. 598-599.

4. *Ладовский И.В.* Формула Грина и интегральное уравнение граничной задачи стационарной теплопроводности // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. Часть 1, Екатеринбург: УрО РАН, 2002. С. 94–101.

5. *Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С.* Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ, 1955. 420 с.

6. *Мартышко П.С.* О решении обратной задачи электроразведки на постоянном токе для произвольных классов потенциалов // Изв. АН СССР. Физика Земли, 1986. № 1. С. 87–92.

7. *Мартышко П.С.* Обратные задачи электромагнитных геофизических полей. Екатеринбург, 1996. 143 с.

8. *Мартышко П.С., Ладовский И.В.* Интегральное уравнение двумерной задачи сопряжения стационарных тепловых полей // Физика Земли, 2005. № 12. С. 12–21.

9. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

10. *Страхов В.Н.* К вопросу о единственности решения плоской обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли, 1972. № 2. С. 38–49.

11. *Цирульский А.В.* К теории метода искусственного подмагничивания в двухмерном случае // Изв. АН СССР, Физика Земли, 1974. № 9. С. 70–76.

12. *Цирульский А.В.* Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей. Свердловск, 1990. 132 с.

13. *Цирульский А.В., Никонова Ф.И.* К вопросу о теоретическом решении обратной задачи логарифмического потенциала // Теория и практика применения аналитических методов интерпретации и математического моделирования геофизических полей. Свердловск, 1977. С. 31–39.

14. *Цирульский А.В., Никонова Ф.И., Федорова Н.В.* Метод интерпретации гравитационных и магнитных аномалий с построением эквивалентных семейств решений. УНЦ АН СССР, 1989. 135 с.

15. *Шестаков А.Ф., Ладовский И.В.* О решении граничных для электрического потенциала с учетом криволинейной поверхности раздела двух сред // Материалы Международной конференции, посвященной 50-летию Института геофизики УрО РАН. Екатеринбург, 2008. С. 309-314 (в печати).