А.Н. Ратушняк

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОВОДЯЩИХ 3D ОБЪЕКТАХ

УДК 550.832
ББК 26.347.313

Ответственный редактор:
доктор технических наук **Астраханцев Ю.Г.**

Рецензенты:
доктор технических наук **Ельцов И.Н.**
доктор геолого-минералогических наук **Титов К.В.**

Ратушняк А.Н. **Рассеяние электромагнитного поля на проводящих 3D объектах.** Екатеринбург: УрО РАН, 2024. – 190 с.

Приведено физико-математическое описание рассеяния гармонического электромагнитного поля на локальных проводящих телах. Отдельное внимание уделено проблеме рассеяния поля на 3D проводящем объекте, находящемся в непроводящей среде. Для численных расчетов приведена система линейных алгебраических уравнений, к которой сводится уравнение рассеяния электромагнитного поля и способы численной реализации. Дано сравнение результатов математического моделирования и физических экспериментов по изучению закономерностей рассеяния электромагнитного поля на проводящих объектах. Приведены примеры практического применения математического моделирования в индуктивных методах электрометрии.

Изложенные материалы предназначены для аспирантов, научных работников и инженеров, изучающих переменные электромагнитные поля в неоднородных проводящих средах.

Ил. 62. Библиогр. 110 назв.

ISBN 978-5-7691-2578-2

© УрО РАН, 2024 г.
© Ратушняк А.Н. 2024 г.

ВВЕДЕНИЕ

Распространение электромагнитного поля в проводящей среде, неоднородной в силу различных естественных или искусственных причин, чаще всего наиболее адекватно отражает реальную физическую ситуацию. Обнаружение локальных проводящих объектов и определение их физико-геометрических параметров является одной из задач электромагнитных геофизических методов, а определение скрытых нарушений однородности – одна из задач дефектоскопии. Применение электромагнитных методов возможно и в ином плане – поиск такого типа и характеристик источника поля, который слабо чувствителен к локальной электрической неоднородности с известными параметрами. Универсальность применения электромагнитных методов благодаря широкому диапазону изменения удельных электрических сопротивлений в природных средах и технических материалах, а так же возможность использования различных по типу и параметрам источников поля определяет важность изучения закономерностей распространения электромагнитного поля в неоднородных проводящих средах.

Для изучения рассеяния гармонического или импульсного электромагнитного поля искусственного источника на локальных трехмерных объектах (сокращенно 3D) во многих областях науки и техники широко используется математическое моделирование.

Одним из первых уравнение для напряженности электрического поля, вызванного плотностью гармонических токов, распределенных в локальном объеме, привел Дж. А. Стрэттон в качестве решения задачи в монографии «Теория электромагнетизма» [Стрэттон, 1948, с.411]. Позже этот способ описания рассеяния электромагнитного поля был использован в материаловедении [Финкельберг, 1964] и впоследствии развит в геофизике [Дмитриев, 1969, 1977; Raiche, 1974; Таборовский, 1975; Hohmann, 1975; Weidelt, 1975 и

др.], в медицине [Livesay, 1974], в радиофизике [Исимару, 1981] и других областях науки.

Для математического описания рассеяния гармонического поля на локальных объектах в настоящей работе используется именно метод векторных объемных интегральных уравнений, который при численной реализации сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Для решения комплексных систем алгебраических уравнений большой размерности в настоящее время разработано большое число численных методов, обладающих устойчивыми алгоритмами с необходимой точностью вычислений. Современные мощные вычислительные суперкомпьютеры с огромными ресурсами памяти и быстродействием позволяют проводить вычисления переменных электромагнитных полей с проводящими 3D объектами со сложным внутренним строением.

Отметим, что для однородных по свойствам 3D тел возможно построение поверхностных интегральных уравнений, называемых формулами Стрэттона-Чу [Стрэттон, 1948]. При их дискретизации размерность получаемой системы линейных алгебраических уравнений меньше. Однако в представленной работе используется математический аппарат именно объемных интегральных уравнений, поскольку позволяет исследовать рассеяние поля неоднородными объектами, что является зачастую очень важным фактором при проведении моделирования 3D неоднородных сред со сложным внутренним строением. Кроме того, опыт решения подобных задач с 3D объектами для магнитостатики [Пеккер, 1969; Тозони, 1975], электромагнитного поля постоянных и гармонических токов [Дмитриев, 1973; Ильин, 1985; Курбатов, 1984; Хижняк, 1986 и др.], а так же других потенциальных полей, включая их парные и перекрестные эффекты [Кормильцев, 2000], показывает, что описание полей методом объемных интегральных уравнений по физической сути эквивалентно полям суперпозиции вторичных элементарных диполей, возникающих в элементах объема тела [Тозони, 1975; Hohmann, 1975]. Это математическое описание позволяет понять физическую простоту процесса рас-

сеяния электромагнитного поля на локальном проводящем объекте.

В представленной работе особое внимание при изложении физических и математических аспектов описания рассеяния электромагнитного поля уделено индукционным токам, возникающим в 3D проводящих объектах под действием переменного магнитного поля. Это связано с тем обстоятельством, что известное трехмерное уравнение для гармонического электрического поля не полностью описывает рассеяние поля проводящим объектом. Возникающее затруднение сразу проявляет себя при изучении рассеяния низкочастотного электромагнитного поля проводящим объектом, находящимся в непроводящей вмещающей среде. Кроме того, выполненные исследования в данной постановке задачи позволяют сопоставлять получаемые расчетные данные с результатами физического моделирования с проводящим объектом, подобным изучаемому, расположенным в воздухе. Исследования рассеяния поля на 3D объекте в непроводящей среде имеют и самостоятельное значение, например в дефектоскопии проводящих технических изделий при обнаружении нарушений сплошности.

Если проводящее тело имеет форму, близкую к шару, можно сопоставить результаты расчетов поля 3D объекта с аналитическим решением этой задачи (называемой задачей Ми) о дифракции электромагнитной волны на проводящем шаре [Борн, Вольф, 1970; Смайт, 1954] (или аналогичным аналитическим решением с другими источниками гармонического поля) и подобного затруднения не возникает.

Впервые описание рассеяния гармонического электромагнитного поля на объекте малого размера системой вторичных электрического и магнитного диполей, как перекрестный электромагнитный эффект, было изложено в работе Морса и Фешбаха [Морс, Фешбах, 1960, с.813] для определения перераспределения гармонического поля на проводящей сфере. В полной мере эта идея относится и к задаче рассеяния гармонического поля на 3D проводнике.

Перекрестный эффект электрического и магнитного полей наиболее яр-

ко проявляет себя в таком природном феномене как свет. Взаимное преобразование переменных электрического поля в магнитное и, напротив, магнитного - в электрическое, приводит к распространению электромагнитных волн в космосе (как среды без потерь) от мощных звездных источников на огромные по космическим масштабам расстояния в течение гигантского по длительности времени. Если распространение поля происходит в проводящей среде и на более низких частотах, по сравнению с частотой света, то это приводит к существенному преобразованию энергии электромагнитного поля в тепловую энергию и затуханию поля при его распространении от источника. Однако перекрестный эффект наблюдается вплоть до инфранизких частот.

Г л а в а 1

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗАРЯД СО СТОРОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Изучение рассеяния электромагнитного поля на локальном проводящем объекте следует начать с рассмотрения сил, действующих на заряды со стороны электрического и магнитного поля. Отклик или реакция заряда или совокупности зарядов в малом объеме среды на воздействие сил является основой правильного физического описания процесса рассеяния гармонического поля.

1.1 Основные законы электромагнетизма.

Закон Кулона, открытый в 1785 году для электростатической силы $\boldsymbol{F}^{E}$ взаимодействия двух точечных зарядов q и Q в среде, характеризуемой диэлектрической проницаемостью ε, имеет вид [Смайт, 1954; Ландау, 1988; Фейнман, 1965]

$$\boldsymbol{F}^{E} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \qquad (1.1)$$

где $\varepsilon_0 = 10^{-9} / 36\pi$ – электрическая постоянная [Ф/м].

Заметим, что действующие на заряды электростатическое поле в непроводящей среде или электрическое поле в проводящей среде по физической сути являются эквивалентами. Применяемые в электродинамике термины «электростатическое поле» указывает на непроводящие (диэлектрические) свойства среды, в котором оно действует и неподвижные статические заряды, а «электрическое поле» указывает на свободные заряды, движение которых обуславливает электрическую проводимость вещества и приводит к возникновению токов проводимости.

Открытие закона Кулона позволило ввести в физике фундаментальные понятия поля и его силовых характеристик – скалярного электрического потенциала U и вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}^{E}$, связанных соотношениями:

$$\frac{\boldsymbol{F}^{E}}{Q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \boldsymbol{E}^{E} = -gradU\,. \qquad (1.2)$$

Обобщение закона Кулона позволяет рассматривать действие на заряд со стороны внешнего электрического поля, создаваемого любым сторонним источником, причем независимо от того, движется этот заряд или является неподвижным (статическим). Если заряд подвижен, т.е. является свободным, то второй силой, действующей на движущийся с постоянной скоростью V заряд со стороны внешнего магнитного поля индукцией B, является магнитная сила $\boldsymbol{F}^{B}$ [Матвеев, 1983; Парселл, 1971; Фейнман, 1977]

$$\boldsymbol{F}^{B} = q[\boldsymbol{V},\boldsymbol{B}] = q\left[\frac{d\boldsymbol{l}}{dt},\boldsymbol{B}\right]. \qquad (1.3)$$

Направление действия силы определяется по правилу левой руки (рис.1). Однородное магнитное поле $\boldsymbol{B}$, направленное перпендикулярно вектору скорости движения $\boldsymbol{V}$ заряда q, заставляет его под действием силы Ампера двигается по окружности постоянного радиуса [Парселл, 1971].

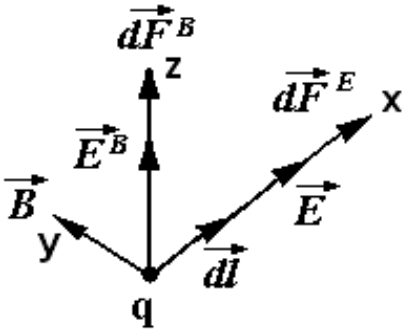


Рис. 1.

Формула (1.3) есть результат экспериментально установленной Ампером в 1820 году силы взаимодействия двух малых элементов тока [Матвеев, 1983]

$$\boldsymbol{F}^{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I \cdot I_1\left[d\boldsymbol{l},\left[d\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{r}\right]\right]}{r^3} = I\left[d\boldsymbol{l},\boldsymbol{B}\right], \qquad (1.4)$$

осуществляемое через воздействие на движущиеся заряды в одном токовом элементе $Id\boldsymbol{l}$ со стороны магнитного поля $\boldsymbol{B}$, создаваемом другим токовым элементом $I_1 d\boldsymbol{l}_1$ по закону Био-Савара [Матвеев, 1983; Парселл, 1971]

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I_1\left[d\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{r}\right]}{r^3}.$$

Поскольку каждый движущийся заряд создает элементарный линейный ток с моментом $Id\boldsymbol{l} = q\boldsymbol{V} = q\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}$, отсюда следует для силы Ампера формула (1.3).

Формула для магнитной силы (1.3) имеет еще один вид. Сила тока I, по определению, есть изменение величины зарядов во времени в локальной точке (или малом объеме) пространства

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\sum\frac{dq_i}{dt}.$$

Рассматривая силу тока как изменение величины заряда относительно точки его первоначального положения, который за малое время dt уменьшился вследствие его перемещения, (что соответствует положительному значению силы тока рис. 1) формула для силы Ампера (1.4), описывающей силовое воздействие со стороны магнитного поля на изменение величины заряда во времени имеет вид

$$\boldsymbol{F}^{A} = \frac{dq}{dt}\left[d\boldsymbol{l},\boldsymbol{B}\right]. \qquad (1.5)$$

В этом выражении, поскольку сам элементарный заряд не исчезает, а перемещается под действием магнитного поля, величина $d\boldsymbol{l}$ характеризует изменение его пространственного положения за малое время dt.

Выражения (1.3) и (1.5) для магнитной силы, действующей со стороны постоянного магнитного поля индукцией $\boldsymbol{B}$ на заряд величиной q, являются эквивалентными записями. По сути, запись силы в виде (1.3) есть перенесенный на микроуровень элементарных зарядов вид силы Ампера, действующей

на токи со стороны внешнего магнитного поля (1.4). При этом причиной движения заряда является любая внешняя сила, перемещающая заряд в пространстве, например механическая, тепловая или Кулоновская сила $\boldsymbol{F}^{E}$, действующая на заряд q со стороны внешнего электрического поля по направлению его вектора напряженности $\boldsymbol{E}$.

Сила Лоренца, действующая на свободный электрический заряд величиной q, движущийся с постоянной скоростью V во внешнем электромагнитном поле, является суммой двух сил, обобщающих два экспериментально открытых закона – Кулона и Ампера [Парселл, 1971; Фейнман, 1977]

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}].$$

В курсах физики неоднократно отмечалось, что закон Кулона (1.1) и закон всемирного тяготения Ньютона для взаимодействия двух точечных масс имеют схожую форму. Точечная масса m в гравитационном поле движется ускоренно $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, ускоренно движется и заряд q, попадающий в электрическое поле. Движение каждого заряда в направлении действия Кулоновской силы есть элементарный электрический ток, увеличивающийся с момента начала движения. Каждый элементарный ток создает свое магнитное поле, также увеличивающееся с ростом скорости движения заряда. Движение зарядов одинакового знака в одном направлении вдоль направления внешнего электрического поля согласно формуле (1.4) сопровождается их взаимным притяжением посредством создаваемого ими магнитного поля. Чем быстрее движется один заряд, тем большее действие он оказывает на соседний заряд согласно силе Ампера. Взаимное притяжение двух движущихся зарядов ограничивается отталкивающим действием силы Кулона со стороны соседнего заряда, поскольку они имеют одинаковый знак.

В скрещенных однородных электрическом и магнитном полях совместное силовое действие двух полей на свободный движущийся заряд, заставляет его двигаться по траектории в виде циклоиды, являющейся суперпозицией линейного и кругового движений [Ландау, 1988; Фейнман, 1977]. Объемное

распределение свободных зарядов в среде, начинающих движение во всех точках объема при возникновении внешнего электрического поля, их силовое взаимодействие приводит к сложной пространственной конфигурации их траекторий движения.

Классическая теория электропроводности проводников основана на осреднении скорости движения зарядов за счет соударений с атомами вещества [Матвеев, 1980; Парселл, 1971; Тамм, 1954]. При этом происходит передача части кинетической энергии движущегося заряда неподвижной кристаллической решетке проводника и ее нагрев в виде выделения Джоулева тепла. Малую среднюю скорость движения зарядов можно объяснить также сложной траекторией движения свободных зарядов за счет силового взаимодействия между ними.

Принимая концентрацию зарядов q величиной N ($м^{-3}$) в объеме среды и осредняя скорость движения для совокупности зарядов, формула для плотности тока проводимости имеет вид $\boldsymbol{i} = qN\boldsymbol{V}$ или $\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}$ с размерностью Кулон/с/$м^2$ т.е. Ампер/$м^2$. Последняя запись, называемая законом Ома в дифференциальной форме, позволяет перейти от сложного движения единичного заряда к направленному движению вдоль силовых линий электрического поля совокупности свободных зарядов. Несмотря на то, что в формуле для плотности тока проводимости стоит величина средней скорости движения зарядов, характеризующая свойства зарядов в некотором объеме среды, дифференциальная форма закона Ома является соотношением, характеризующем величины в каждой точке пространства. При этом можно перейти от средней скорости движения зарядов к характеристике проводящих свойств среды, где происходит перенос свободных зарядов, которая называется удельной электропроводностью $\sigma = q \cdot N \cdot U$, где $U = \boldsymbol{V} / \boldsymbol{E}$ – подвижность зарядов (средняя скорость движения зарядов в единичном электрическом поле в данной среде). В характеристике подвижности свободных зарядов U учитывается длина свободного пробега заряда в кристаллической решетке по сложной

траектории с учетом действия двух сил — Кулона и Ампера со стороны электрического и магнитного поля.

* В современной теории электропроводности проводников учитываются волновые свойства электронов, а их упорядоченное движение рассматривается как процесс возникновения и распространения электронных волн. Электрическое сопротивление объясняется рассеиванием электронных волн на кристаллической решетке. Некоторые теории электропроводности рассматривают процесс протекания тока в проводящей среде как последовательный обмен электронами внешних орбит соседних атомов вдоль замкнутых силовых линий электрического поля, при этом наличие в среде свободных зарядов игнорируется.

Для рассматриваемого в нашем случае рассеяния электромагнитного поля на макроуровне, где величина электропроводности определяется усредненным значением для малого объема среды, мы остановимся на классическом описании теории электропроводности.

1.2 Импульс магнитной силы. Сила Фарадея и сила Лоренца

Рассмотрим силовое воздействие на заряд в случае переменного электромагнитного поля. Сопоставление выражений для силового воздействия магнитного поля для силы Ампера $\boldsymbol{F}^{A}$ вида (1.5) и $\boldsymbol{F}^{B}$ вида (1.3) позволяет рассматривать **импульс магнитной силы** (Н·с), действующей на заряд со стороны магнитного поля

$$\boldsymbol{F}^{A} \cdot dt \equiv \boldsymbol{F}^{B} \cdot dt = q\left[d\boldsymbol{l}, \boldsymbol{B}\right] \qquad (1.6)$$

как изменение во времени всех входящих величин, а именно:

- величины заряда в данной точке пространства:
- пространственного положения заряда;
- величины магнитного поля.

Изменение во времени первых двух величин, как было показано ранее, являются эквивалентными записями.

Согласно теории относительности движения не важно, какая физическая

величина изменяется – заряд, изменяя пространственное положение, или магнитное поле. В любом случае возникает импульс магнитной силы. Исторически в разное время были открыты два явления: — действие силы при движении зарядов (при течении тока) со стороны постоянного магнитного поля, открытое Ампером в 1820 году и возникновение силы, действующей на заряды при изменении магнитного поля — открытое Фарадеем в 1831 году как физическое явление индукции.

Обобщение закона электромагнитной индукции Фарадея как возникновение ЭДС в замкнутом контуре при изменении потока магнитного поля через его площадь независимо от причины этого изменения дано Дж. К. Максвеллом в работе «О физических силовых линиях» в 1861 году [Фейнман, 1977]. В этой работе проанализированы обе причины возникновения ЭДС:

- изменение площади контура, пересекаемой постоянным магнитным полем, которая названа «двигательной» ЭДС;

- изменение величины магнитного поля за счет или изменения ориентировки момента источника в пространстве или изменения самой величины момента во времени. Эта ЭДС названа «трансформаторной».

Интегральная форма закона Фарадея, представленная Максвеллом, имеет вид [Матвеев, 1980; Парселл, 1971]

$$\mathcal{E} = \oint_L E_l dl = -\frac{d}{dt}\Phi = -\frac{d}{dt}\int_S B_n dS, \qquad (1.7)$$

где S – площадь, ограниченная замкнутым контуром L.

В этой общепринятой формулировке закона электромагнитной индукции Фарадея скрыто то обстоятельство, что действие переменного магнитного поля на заряд так же является силой. Изменение во времени магнитного потока Φ и возникновение ЭДС как изменение площади контура и изменение величины магнитной индукции во времени следует рассматривать в (1.7) как производную от произведения двух функций (принимая, что магнитное поле является однородным в контуре малого размера)

$$\frac{d}{dt}\left(B_n S\right) = S\frac{d}{dt}B_n + B_n\frac{d}{dt}S\,.$$

Из формулы для импульса магнитной силы (1.6) следует, что сила, действующая на заряд со стороны переменного магнитного поля, может быть записана в виде

$$\boldsymbol{F} = q\left[d\boldsymbol{l}, \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right], \tag{1.8}$$

а напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}^i$, возникающую при ее действии на заряд, следует называть индукционной напряженностью для отличия от напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}^E$, обусловленной действием Кулоновской силы со стороны внешнего электрического поля

$$\boldsymbol{E}^i = \frac{\boldsymbol{F}}{q} = \left[d\boldsymbol{l}, \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right]. \tag{1.9}$$

Эта формула соответствует дифференциальной форме закона электромагнитной индукции Фарадея, записанной Максвеллом в виде [Фейнман, 1977]

$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}, \tag{1.10}$$

но лишь формально, поскольку величина $d\boldsymbol{l}$ является неопределенной.

Заметим, что величину $\boldsymbol{M}_e = qd\boldsymbol{l}$ в формуле (1.8) следует понимать как электрический момент, возникающий под действием переменного магнитного поля на элементарный заряд.

Согласно дифференциальной форме закона индукции (1.10), вихревое электрическое поле возникает в пространстве независимо от проводящих свойств окружающей среды, т.е. наличия или отсутствия зарядов. При этом индукционный ток возникает только в проводящей среде.

Выражение (1.8) не является эквивалентной записью для магнитной силы Ампера, описываемой формулами (1.3) или (1.5). Это выражение для силы имеет самостоятельное значение и следует из закона индукции Фарадея. Ее следует называть **силой Фарадея**, поскольку она обусловлена действием на

заряд со стороны переменного магнитного поля.

Формула для магнитной силы, действующий на заряд со стороны магнитного поля принимает вид

$$\boldsymbol{F} = q\frac{d}{dt}\left[d\boldsymbol{l},\boldsymbol{B}\right] = q\left[\frac{d\boldsymbol{l}}{dt},\boldsymbol{B}\right] + q\left[d\boldsymbol{l},\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right], \tag{1.11}$$

а сила Лоренца, действующая на электрический заряд q со стороны внешнего электромагнитного поля

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\frac{d}{dt}\left[d\boldsymbol{l},\boldsymbol{B}\right] = q\boldsymbol{E} + q\left[\frac{d\boldsymbol{l}}{dt},\boldsymbol{B}\right] + q\left[d\boldsymbol{l},\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right] \tag{1.12}$$

и содержит в себе три составляющие силы: Кулона, Ампера и Фарадея. В случае стационарного электромагнитного поля на свободные заряды в проводящей среде действуют силы Кулона и Ампера, а в случае переменного поля к ним добавляется сила Фарадея.

На заряд может действовать только одна сила Фарадея. Ее действие описано в курсах физики как эксперимент, проведенный Фарадеем в 1831 году, впервые показывающий возникновение ЭДС индукции и индукционного тока в проводящем замкнутом контуре, находящимся в воздухе, изменяющимся магнитным полем [Джексон, 1965; Парселл, 1971]. Силы Кулона и Ампера в возникновении ЭДС индукции не участвуют.

Совместное действие сил Ампера и Фарадея следует непосредственно из формулы закона электромагнитной индукции (1.7) если рассматривать одновременно изменение во времени двух величин – площадь контура и магнитную индукцию. При этом важно, что действие двух сил – Ампера и Фарадея имеют одинаковое направление.

Приведем описание двух экспериментов, показывающих совместное действие двух сил, причем действие каждой из сил можно определить раздельно за счет встречных направлений.

В первом эксперименте, описанном в учебниках по электродинамике, измерения ЭДС в замкнутом контуре с уменьшающейся площадью при одновременном пропорциональном увеличении величины магнитной индукции,

пересекающей ее, приводит к нулевой общей величине ЭДС [Матвеев, 1983]. Совместное пропорциональное изменение и площади, и индукции определяют общую нулевую ЭДС за счет встречного действия на заряды двух сил – Ампера и Фарадея.

Второй эксперимент состоит в измерении ЭДС, наводимой в замкнутом контуре магнитным полем гармонического тока в соосной индукционной генераторной катушке. Измерительный контур и генераторная катушка имеют малые размеры по сравнению с расстоянием между ними. Измерительный контур может вращаться вокруг оси, ортогональной плоскости контура, по гармоническому закону $\cos\omega t$, т.е. при вращении площадь измерительного контура относительно оси генераторной катушки изменяется как $S = S_0 \cos\omega t$. Круговые частоты вращения контура и изменения силы тока в генераторной катушке одинаковы и равны ω.

Магнитное поле с величиной модуля индукции B_0 от постоянного тока I_0 в катушке индуцирует во вращающемся контуре ЭДС, равную

$$\mathcal{E} = -B_0 \frac{\partial}{\partial t} S = \omega B_0 S_0 \sin\omega t .$$

Эта часть измеряемой ЭДС обусловлена действием на движущийся заряд со стороны постоянного магнитного поля, т.е. описывает действие силы Ампера.

В неподвижном измерительном контуре, соосном с катушкой, переменный ток генераторной катушки $I = I_0 \cos\omega t$ создает магнитное поле равное $B = B_0 \cos\omega t$, которое индуцирует в контуре аналогичную величину ЭДС, равную

$$\mathcal{E} = -S_0 \frac{\partial}{\partial t} B = \omega B_0 S_0 \sin\omega t .$$

Эта часть измеряемой ЭДС обусловлена действием на неподвижные заряды со стороны переменного магнитного поля, т.е. описывает действие силы Фарадея.

Если фазовый сдвиг между частотой вращения контура и частотой тока в катушке равен нулю, то совместное изменение по одному закону $\cos\omega t$ двух величин - площади и магнитной индукции, определяющих ЭДС в контуре, дает величину ЭДС удвоенной частоты

$$\varepsilon = -S\frac{\partial}{\partial t}B - B\frac{\partial}{\partial t}S = \omega B_0 S_0 2\sin\omega t\cos\omega t = \omega B_0 S_0 \sin 2\omega t .$$

Если ток в генераторной катушке сдвинуть на угол $\pi/2$ относительно угла вращения измерительного контура, т.е. $I = I_0 \sin\omega t$, то магнитное поле переменного тока в катушке создает в неподвижном контуре ЭДС

$$\varepsilon = -S_0\frac{\partial}{\partial t}B = -\omega B_0 S_0 \cos\omega t ,$$

а совместное изменение по разным законам двух величин - площади и магнитной индукции, определяющих ЭДС в контуре, создает величину ЭДС

$$\varepsilon = -S\frac{\partial}{\partial t}B - B\frac{\partial}{\partial t}S = \omega B_0 S_0 \left(\sin^2\omega t - \cos^2\omega t\right) = -\omega B_0 S_0 \cos 2\omega t .$$

В этом опыте можно наблюдать как раздельный, так и совместный вклад двух сил – Ампера и Фарадея в создаваемую величину ЭДС индукции в замкнутом контуре.

1.3 Движение заряда в переменном электромагнитном поле

Изложенные выше основы классической теории электропроводности как перенос свободных зарядов под действием силы Кулона, относятся к проводникам, а точнее – к металлам (золото, медь, алюминий, железо и др.), обладающим на макроуровне очень высокой удельной электропроводностью. Большинство природных сред и технических материалов обладают величинами удельной электропроводности на много порядков меньше металлов и, по сути, являются полупроводниками, проводимость которых обусловлена связанными зарядами [Паркинсон, 1986].

Под действием силы Кулона на электрически нейтральную среду, спо-

собную поляризоваться внешним электрическим полем, происходит смещение положительных и отрицательных зарядов относительно их первоначального нейтрального положения. Положительные заряды смещаются по линии направления внешнего поля $\boldsymbol{E}$, отрицательные - во встречном направлении, образуя электрический диполь. При этом в переменном гармоническом электрическом поле Кулоновская сила $\boldsymbol{F}^{E}$ (1.1) и пространственное смещение зарядов изменяются синхронно (в фазе) с изменением поля.

Как следует из формулы (1.8), сила Фарадея, действующая на положительный заряд со стороны переменного магнитного поля, направлена в плоскости, в соответствии с рис. 1, ортогональной вектору магнитного поля. Величину $\boldsymbol{dl}$ здесь следует рассматривать как результат кулоновской поляризации зарядов внешним переменным электрическим полем, т.е. малое смещение зарядов относительно нейтрального первоначального положения. На заряды разного знака со стороны однородного переменного магнитного поля (ввиду малости величины $\boldsymbol{dl}$) действуют равные по величине, но противоположные по направлению силы $\boldsymbol{F}^{B}$, которые образуют пару сил. Вращающий момент пары сил (рис.2) стремится ориентировать диполь в направлении, ортогональном электрическому полю.

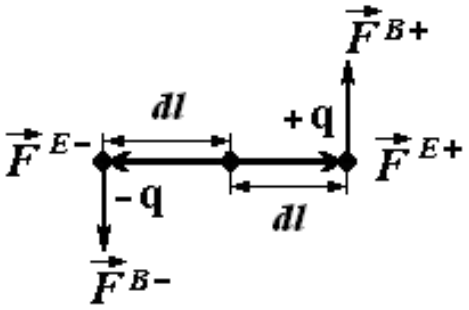


Рис.2.

Определим траекторию движения положительного заряда относительно первоначального нейтрального положения в гармоническом электромагнитном поле с временной зависимостью источника вида $\cos\omega t$ и зададим направление составляющих поля в плоскости XY, равными $\boldsymbol{E}=(E_X,0,0)$,

$\boldsymbol{B} = (0, B_Y, 0)$ (рис. 1). Тогда

$$E_X = E_{X0}\cos\omega t, \quad \frac{\partial B_Y}{\partial t} = B_{Y0}\frac{\partial}{\partial t}(\cos\omega t) = -\omega\mu_0 H_{Y0}\sin\omega t, \text{ где: } \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}.$$

Установим соотношение между амплитудами напряженностей электрического и магнитного поля величиной импеданса $Z = E_{X0}/H_{Y0}$.

Положим в формуле (1.8) расстояние *dl* столь малым, что величины и направления как магнитного, так и электрического поля в ее пределах не изменяются. Величины фазовых углов переменного электрического и магнитного поля также не изменяются в пределах длины *dl*, т.е. электромагнитное поле является квазистационарным.

Силовое воздействие со стороны электрического поля на положительный заряд, согласно (1.1), приводит к его смещению по направлению поля относительно первоначального нейтрального положения на величину *dx*, пропорциональную $dx \simeq E_{X0}\cos\omega t$, а воздействие со стороны переменного магнитного поля, согласно (1.8) - в ортогональном направлении на величину *dz*, которая пропорциональна

$$dz \simeq dx\frac{\partial B_Y}{\partial t} = -dx\omega\mu_0\frac{E_{X0}}{Z}\cdot\sin\omega t = -pE_{X0}\cdot\sin\omega t.$$

Траектория движения заряда под действием гармонического поля находится в плоскости XOZ и в электрическом поле с единичной амплитудой E_{X0}=1 описывается радиус-вектором $R(\cos\omega t, \ -p\sin\omega t)$.

В течение одного периода изменения внешнего гармонического поля траектория движения заряда, расположенная в плоскости XOZ, ортогональной плоскости поляризации поля XOY и вектору напряженности магнитного поля, направленному по оси Y, представляет собой эллипс при $p \neq 1$ и окружность при $p = 1$ (рис. 3). Направление вращения положительного заряда в плоскости XOZ подчиняется правилу Ленца - заряд *q*, движущийся по замкнутой траектории с круговой частотой ω и создаваемый им индукционный ток силой $I = \omega \cdot q$ создает по закону Био-Савара вторичное магнитное поле,

направленное против изменения внешнего магнитного поля.

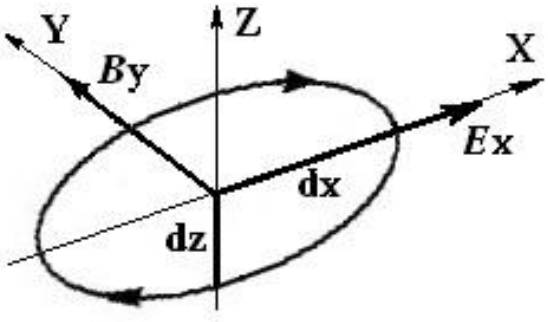


Рис. 3. Траектория движения заряда под действием гармонического электромагнитного поля

Для магнитного поля с индукцией $\boldsymbol{B} = B_Y \cos \omega t$, уменьшающейся по амплитуде при $t > 0$ для первой половины периода, $dz < 0$ т.е. вращение положительного заряда в плоскости XOZ и, соответственно, вектор индукционной плотности тока направлены по часовой стрелке, как указано на рис. 3. Возрастающий индукционный ток, создает собственное магнитное поле, стремящееся увеличить уменьшающееся внешнее магнитное поле.

Введенный выше импеданс Z характеризует соотношение между напряженностями электрического и магнитного поля, а для совокупности зарядов, содержащихся в малом объеме среды, определяется ее удельной электропроводностью. Введенное обозначение $p = dx\omega\mu_0 / Z = \omega\mu_0\sigma \cdot dx^2$ является безразмерным волновым параметром среды, характеризуемой частотой поля и удельной электропроводностью среды σ (См/м). Отношение малой и большой осей эллипса пропорционально волновому параметру p, т.е. частоте и удельной электропроводности.

Внутри малого поляризующегося объема встречное вихревое движение соседних зарядов в плоскости, ортогональной вектору переменного магнитного поля, взаимно компенсируется. На границах малого объема в этой плоскости вихревое движение зарядов не скомпенсировано и образует поверхностную замкнутую систему вихревых токов.

Отметим, что заряды, получающие электрический момент $M_e = q\boldsymbol{dl}$ под

действием силы Фарадея, совершают круговое движение (т.е. создают элементарный вихревой ток) даже в отсутствие внешнего электрического поля. Огромное число поляризующихся зарядов в единице объема проводящей среды обеспечивает большой индукционный ток. Удельная электропроводность является фундаментальной характеристикой проводящих свойств среды и не зависит от величины внешнего электромагнитного поля и режима его изменения [Парселл, 1971; Матвеев, 1983]. При этом оценка проводящих свойств по величине измеряемого магнитного или электрического поля при известных параметрах источника может отличаться по своей величине в зависимости от постоянного или переменного режима поля источника тока. Если в стационарном режиме удельная электропроводность определяется наличием в среде свободных зарядов и обусловленными ими токами проводимости, то в переменном поле к ним добавляются замкнутые индукционные токи. Действие внешнего переменного магнитного поля на заряды, т.е. силы Фарадея, осуществляется в направлении, ортогональном электрическому полю. Этим объясняется расхождение в определении удельной электропроводности среды при постоянном и переменном режиме тока в источнике. Изменение удельной электропроводности среды по мере увеличения частоты тока в источнике называют частотной дисперсией электропроводности [Фейнман, 1977].

В приведенном выше анализе действия электромагнитных сил не учитываются магнитные свойства среды. В случае контрастности среды и 3D тела по магнитной проницаемости (в однородной по электропроводности среде) эта задача является магнитостатической и рассмотрена в других работах, например [Кормильцев, 2000].

Заключение:

- задача изучения воздействия гармонического электромагнитного поля сводится к определению воздействия двух сил – Кулона и Фарадея, действующих на заряды со стороны электрического и магнитного полей;
- действие на свободные заряды переменного электрического поля эквива-

лентно постоянному полю и сводится к направленному (синхронно изменению внешнего поля) движению свободных зарядов и появлению в проводящей среде токов проводимости;

- действие переменного магнитного поля сводится к замкнутому движению зарядов и появлению в проводящей среде вихревых токов индукции, пропорциональных удельной электропроводности и частоте магнитного поля.

Г л а в а 2

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрим физический аспект поляризации локального проводящего объема стационарным электрическим полем стороннего источника и способ описания создаваемого им аномального электрического и магнитного поля.

2.1 Стационарные потенциальные поля

Кроме потенциала притяжения, называемого Ньютоновым потенциалом, известно шесть стационарных полей, потенциал которых удовлетворяет уравнению Лапласа-Пуассона. Перечислим эти поля: электростатическое поле неподвижных зарядов, электрическое поле постоянного тока, магнитное поле магнетика, течение жидкости в проницаемой среде (течение Дарси), тепловое поле, поле диффузии вещества в пористой среде [Тихонов, 1977].

Ньютонов потенциал является наиболее простым потенциалом, поскольку первоначальные гравитирующие массы не изменяются, если в рассматриваемый объем ввести новые гравитирующие массы. Ньютонов потенциал является интегральной суммой потенциалов притяжения всех масс (материальных точек), которые не изменяют своей величины под влиянием взаимного притяжения. Иначе говоря, гравитация не сопровождается поляризацией среды.

В отличие от гравитирующей массы, для электростатического поля заряд Q, внесенный из вакуума в диэлектрик, вследствие поляризации среды изменяет Кулонову силу, с которой он притягивает или отталкивает пробный заряд q. В неоднородном диэлектрике под действием поля первичного заряда на поверхности возникают вторичные поляризованные заряды разного знака, в сумме равные нулю (рис. 4).

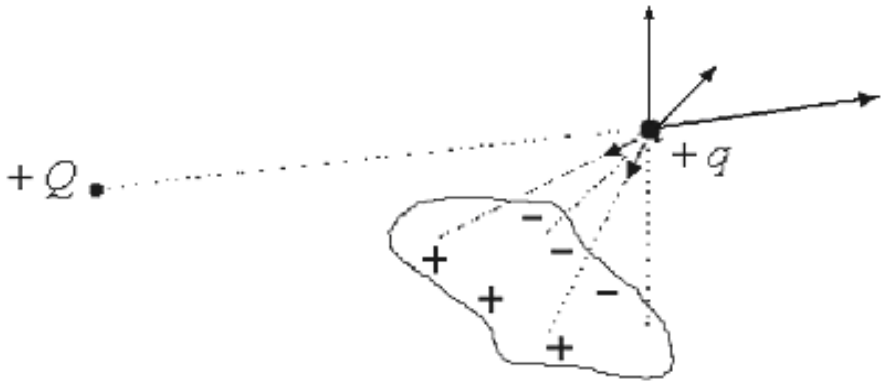


Рис. 4

Однако их действие на пробный заряд q не равно нулю из-за различия расстояний. Напряженность электрического поля в неоднородном диэлектрике уже не равна векторной сумме Кулоновых сил, создаваемых первичными зарядами. В этом существенное отличие полей, приводящих к поляризации среды, от гравитационного поля.

Действие внешнего электростатического поля приводит к перераспределению зарядов внутри вещества (суммарный заряд всегда равен нулю), что означает появление индуцированного (наведенного или перераспределенного) внутреннего поля. Это внутреннее поле, в свою очередь, изменяет внешнее поле. Этот процесс называется поляризацией. Каждый раз, изменяя величину или пространственное положение внешнего заряда Q, относительно неоднородного диэлектрика, можно наблюдать изменения внешнего поля.

Поляризацией (или намагничением) среды, т.е. появлением зарядов или полюсов разного знака описываются не только электростатическое и магнитное поля сторонних источников в неоднородной среде. Оно пригодно для всех потенциальных полей. Описание электрического поля токов в проводящей среде, течения флюидов в проницаемой среде, тепловое поле, поле диффузии вещества в пористой среде для неоднородных сред может быть получено так же с помощью явления поляризации [Кормильцев, 2000].

Термин «поляризация» будем понимать в широком смысле реакции поля от локального 3D объекта, отличающегося по свойствам от вмещающего

пространства, на воздействие внешнего поля – в электростатике это поляризация диэлектрика, в магнитостатике – намагничивание магнетика, в электродинамике – поляризация проводника электромагнитным полем.

Термин «вектор намагничения» или тождественный ему «намагниченность» давно устоялся в магнитостатике при описании явления намагничивания магнетиков магнитным полем. Но далее будем применять термин «вектор поляризации» в более широком смысле описания этого эффекта для всех потенциальных и вихревых полей.

Если для всех шести стационарных полей вектор, соответствующий плотности потока поля, обозначить как $\boldsymbol{q}$, материальный коэффициент, характеризующий физические свойства среды по отношению к полю как a, а потенциал U (температуру T, давление P или концентрацию C) буквой W, т.е. $\boldsymbol{q} = -a\ grad W$, то для всех шести полей справедливо уравнение неразрывности плотности потока поля $div\ \boldsymbol{q} = 0$ и потенциал в кусочно-однородной среде вне источников удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta W = 0$ [Будак, 1972, с.347].

Эта аналогия полей позволила объединить их одним термином – потенциальные поля. При этом аналогия между дифференциальными уравнениями для потенциальных полей распространяется и на методы их решения.

Отметим, что для всех потенциальных полей под силовыми характеристиками поля будем понимать скалярную величину потенциала, соответствующего данному виду поля, а также векторную величину градиента потенциала, называемого напряженностью для электростатического, электрического и магнитного полей. Под динамическими характеристиками полей будем понимать скалярную величину потока поля и векторную величину плотности потока поля. Этой характеристике соответствуют сила тока и вектор плотности тока, в гидродинамике это дебит жидкости и вектор скорости ее течения, в магнитостатике это поток магнитной индукции и вектор магнитной индукции и т.п.

Особо отметим, что при исследовании полей уравнение неразрывности

плотности полного потока поля $div\ \boldsymbol{q} = 0$ является основным для определения силовых и динамических характеристик полей в неоднородных средах. При исследовании электромагнитных полей это уравнение неразрывности плотности полного тока $div\ \boldsymbol{i} = 0$ и уравнение неразрывности магнитной индукции $div\ \boldsymbol{B} = 0$.

2.2 Поляризация локального тела постоянным электрическим полем

Рассмотрим поляризацию локального тела, отличающегося более высокой удельной электропроводностью по сравнению с вмещающей однородной средой на примере электрического поля, создаваемого сторонним источником постоянного тока. Отметим отличия и подобия процессов поляризации внешним электрическим полем локального диэлектрика или проводника.

В соответствии с законом Кулона воздействие внешнего электрического поля на объем V с диэлектрической проницаемостью ε, повышенной по сравнению с окружающей средой, приводит к появлению на его противоположных поверхностях, через которые силовые линии электрического поля входят и выходят из объема, неподвижных индуцированных зарядов разного знака [Смайт, 1954]. Индуцированные заряды могут возникнуть или благодаря смещению электронной оболочки относительно ядра атома, или же в результате переориентации молекул, которые имеют собственный дипольный электрический момент. При этом сам физический механизм появления индуцированных зарядов не является существенным для описания явления поляризации диэлектрика.

На расстоянии, существенно превышающем размеры объема, потенциал U, создаваемый поляризующимся объемом, может быть представлен как потенциал диполя [Стрэттон, 1948]. Запишем его в виде

$$U^a = \frac{\boldsymbol{M}_Э}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R^3},\ R = \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

где $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ – радиус-вектор точки определения потенциала поля; $\boldsymbol{r}'(\xi, \eta, \zeta)$ – радиус-вектор диполя. Момент образующегося электростатического диполя, выражаемый через ρ – объемную плотность зарядов, как

$\boldsymbol{M}_{Э} = \int_{V} \rho \cdot \boldsymbol{r}' dV = Q d\boldsymbol{l}$, направлен вдоль воздействующего электрического поля от отрицательного полюса к положительному, вдоль вектора $d\boldsymbol{l}$.

В проводящей среде внешнее электрическое поле приводит в движение элементарные заряды, что обуславливает появление токов проводимости. Поляризацию внешним электрическим полем локального проводника объемом V, обладающего повышенной, по сравнению с окружающей средой удельной электропроводностью σ, на расстоянии, превышающем размеры объема, можно описать как образование токового электрического диполя в центре объема [Смайт, 1954].

К этому выводу приводит анализ решения задачи о плотности тока, создаваемого точечным источником постоянного тока I, вблизи контакта сред с различной электропроводностью σ. По линии нормали от точечного источника к контакту величина плотности аномального тока вблизи контакта отрицательная, если среда с источником менее проводящая, и положительная при обратном соотношении (рис. 5).

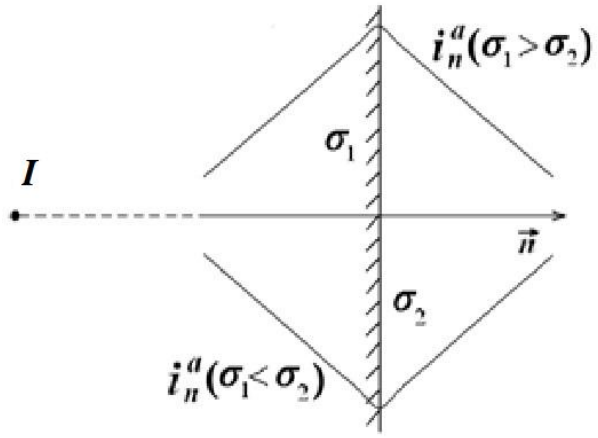


Рис. 5 Плотность токов проводимости вблизи контакта сред

Ток «затягивается» в более проводящую среду или «отталкивается» от менее проводящей среды. Экстремумы аномальной части плотности тока всегда расположены на контакте сред, при этом составляющая плотности тока по нормали к контакту на границе сред непрерывна $i_{n1} = i_{n2}$.

Аналогичный вывод следует из анализа решения задачи о потенциале

шара с удельным электрическим сопротивлением, отличающемся от вмещающей среды, помещенном в однородное электрическое поле [Бурсиан, 1972; Заборовский, 1963].

Аномальный потенциал, создаваемый во внешней точке от возникающего в центре объема электрического диполя равен

$$U^a = \frac{\boldsymbol{M}_E}{4\pi\sigma} \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R^3},$$

где $\boldsymbol{M}_E = -\frac{d}{dt}\int_V \rho \cdot \boldsymbol{r}' dV = Id\boldsymbol{l}$ - момент электрического диполя, направленный вдоль воздействующего электрического поля от отрицательного полюса диполя к положительному, вдоль по вектору $d\boldsymbol{l}$ [Стрэттон, 1948]. Величина момента зависит от величины напряженности внешнего поля $\boldsymbol{E}$ и соотношения проводящих свойств объема и вмещающей среды.

Приведенные выражения для потенциалов характеризуют аномальный потенциал на большом удалении от поляризующегося объема или его малый размер. Для исследования электрического поля на расстояниях, сравнимых с размером объема и, что особенно важно, для неоднородного по проводимости объема, введем другую векторную физическую величину, заключающую в себе момент возникающего в результате поляризации электрического диполя и проводящие свойства вмещающей среды, связанную соотношением $\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{M}_E}{\sigma}$.

2.3 Вектор поляризации

Представление моментов электростатического и электрического диполей в виде функции плотности зарядов или их изменения во времени для малого объема среды, позволяет ввести в рассматриваемый аномальный потенциал характеристику поляризации единицы объема, необходимую для определения поляризации среды всего конечного объема.

Если $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}dV$, где $\boldsymbol{p}$ – вектор поляризации единицы объема [Кудрявцев, 1988] или просто вектор поляризации, в общем случае зависящий от коорди-

нат, то аномальный потенциал, создаваемый в окружающем пространстве элементарным поляризующемся объемом dV

$$dU^a = \frac{\boldsymbol{p}}{4\pi} \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} dV ,$$

а для тела объемом V аномальный потенциал, возникающий вследствие его поляризации внешним полем [Тамм, 1954]

$$U^a = \frac{1}{4\pi} \int_V \boldsymbol{p} \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \, dV . \qquad (2.1)$$

Выражение для аномального потенциала поляризующегося локального объема среды (2.1) имеет самый общий характер и пригодно для всех шести стационарных полей [Будак, 1972, с.347]. Необходимо лишь установить для изучаемого поля, какая характеристика соответствует потенциалу (электростатическому, магнитостатическому или электрическому или, например - температуре T, давлению P, концентрации вещества C) и найти связь между ним и вектором поляризации $\boldsymbol{p}$ [Кормильцев, 2000].

Полный потенциал поля в неоднородной среде состоит из первичного потенциала поля (потенциала стороннего источника в однородной среде) и аномального потенциала локального объема, описываемого формулой (2.1).

Для электрического поля, создаваемого стационарным сторонним источником и локального поляризующегося объема V, находящегося в проводящей среде, вектор поляризации будем определять исходя из его размерности как величину разрыва (скачка) электрического поля на границе раздела двух сред с различными электропроводностями $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{E}_e - \boldsymbol{E}$, где: $\boldsymbol{E}_e$ - напряженность электрического поля с наружной (*external*) стороны включения в среде с электропроводностью σ_0; $\boldsymbol{E}$ - напряженность поля с внутренней стороны включения с электропроводностью σ, зависящего от координат объема V.

Из уравнения непрерывности плотности тока $div\, \boldsymbol{i} = 0$ следует, что на границе сред тангенциальные составляющие напряженности электрического

поля непрерывны $E_{te} = E_t$. Следовательно, составляющая вектора поляризации, направленная по вектору нормали $\boldsymbol{n}$ к границе равна

$$p_n = E_{ne} - E_n .$$

Из того же уравнения непрерывности следует, что на границе сред непрерывна нормальная составляющая плотности полного тока

$$i_{n0} = i_n \ , \ \sigma_0 E_{ne} + i^c_{n0} = \sigma E_n + i^c_n$$

где i^c_{n0} и i^c_n - составляющие плотности сторонних токов на наружной и внутренней сторонах границы включения. Отсюда

$$E_{ne} = \frac{\sigma}{\sigma_0} E_n + \frac{i^c_n - i^c_{n0}}{\sigma_0} \text{ и } p_n = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} E_n + \frac{i^c_n - i^c_{n0}}{\sigma_0} .$$

Если составляющая по нормали вектора поляризации дана этим выражением, то весь вектор поляризации

$$\boldsymbol{p} = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{i}^c - \boldsymbol{i}^c_0}{\sigma_0}, \qquad (2.2)$$

а аномальный потенциал элементарного объема dV получим, подставляя вектор поляризации (2.2) в выражение (2.1)

$$dU^a = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \left[(\sigma - \sigma_0)\boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{i}^c - \boldsymbol{i}^c_0 \right) \right] \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} dV .$$

Добавляя потенциал поля источника в однородной среде, называемый нормальным U^0, перейдем к суммарному потенциалу конечного объема V во всем пространстве

$$U = U^0 + \frac{1}{4\pi\sigma_0} \int_V (\sigma - \sigma_0)\boldsymbol{E} \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} dV + \frac{1}{4\pi\sigma_0} \int_{V_C} \left(\boldsymbol{i}^a - \boldsymbol{i}^a_{cm} \right) \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} dV . \qquad (2.3)$$

В полученном выражении присутствуют аномальные плотности токов проводимости $\boldsymbol{i}^a = (\sigma - \sigma_0)\boldsymbol{E}$ и аномальные плотности сторонних токов $\boldsymbol{i}^{ac} = \boldsymbol{i}^c - \boldsymbol{i}^c_0$. Следовательно, количественной характеристикой поляризации

локального объекта внешним полем является динамическая величина электрического поля – плотность аномальных токов, возникающих внутри локального объекта. Интегрирование фактически ведется по областям пространства, в которых сосредоточены аномальные плотности тока. В общем случае объемы интегрирования для первого и второго интегралов могут быть различны, если плотность аномальных сторонних токов сосредоточена в объеме V_C, а избыточная электропроводность – в объеме V.

2.4 Вектор-потенциал электрического типа

Формула (2.3) может быть получена через вспомогательный вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$, вводимый как $\boldsymbol{H} = rot\ \boldsymbol{A}$ из уравнения непрерывности магнитного поля $div\ \boldsymbol{H} = 0$ (для немагнитной среды) и формулы векторного анализа $div\, rot\ \boldsymbol{A} = 0$ при условия калибровки $U = -div\ \boldsymbol{A} / \sigma_0$.

В неоднородной среде вектор-потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i}^a - \boldsymbol{i}^c$$

и имеет решение в виде интеграла Пуассона [Смайт, 1954; Краев, 1965; Тихонов,1977]

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\boldsymbol{i}^a + \boldsymbol{i}^c \right] \frac{dV}{R}. \qquad (2.4)$$

Выделим в этом выражении для вектор-потенциала первое слагаемое, соответствующее нормальному полю источников стороннего тока $\boldsymbol{i}_0^c$ в среде, однородной по электропроводности σ_0

$$\boldsymbol{A}^0 = \frac{1}{4\pi} \int_{V_c} \boldsymbol{i}_0^c \frac{dV}{R},$$

второе слагаемое – аномальное поле плотности токов проводимости $i^a = (\sigma - \sigma_0) E$, третье – аномальное поле плотности сторонних токов $\boldsymbol{i}^{ac} = \boldsymbol{i}^c - \boldsymbol{i}_0^c$, тогда

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^0 + \boldsymbol{A}^a + \boldsymbol{A}^{ac} = \boldsymbol{A}^0 + \frac{1}{4\pi}\int_V (\sigma - \sigma_0)\boldsymbol{E}\frac{dV}{R} + \frac{1}{4\pi}\int_{V_c} \boldsymbol{i}^{ac}\frac{dV}{R}. \qquad (2.5)$$

Для стороннего источника в виде элементарного электрического диполя с плотностью стороннего тока $\boldsymbol{i}_0^c(\boldsymbol{r}') = I^c(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{l}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ где: $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$- дельта-функция Дирака, вектор-потенциал в однородной среде равен

$$\boldsymbol{A}^0 = \frac{I^c d\boldsymbol{l}}{4\pi R}.$$

Это выражение для вектор-потенциала от элементарного источника в виде электрического диполя, определяет его название как вектор-потенциал электрического типа. В последующем будет введен еще один вспомогательный вектор-потенциал магнитного типа, создаваемый элементарным источником в виде магнитного диполя – витка с током малого радиуса.

Переход с силовым характеристикам электромагнитного поля (потенциал и напряженность электрического поля) осуществляется применением дифференциальных операторов к выражению для вектор-потенциала (2.5), которые дают их пространственное распределение.

Для расчета потенциала в условии калибровки вектор-потенциала $U = -div\,\boldsymbol{A}/\sigma_0$ для слагаемых, входящих в выражение (2.5), используем соотношение

$$div\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{R} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\cdot grad'\frac{1}{R} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{R}}{R^3},$$

где оператор div означает дифференцирование по координатам точек наблюдений $\boldsymbol{r}(x, y, z)$, штрих у дифференциального оператора $grad'$ означает дифференцирование по координатам точек интегрирования $\boldsymbol{r}'(\xi, \eta, \zeta)$. Отсюда можем получить выражение для потенциала *U*, тождественное (2.3).

Для напряженности электрического поля, связанной с потенциалом соотношением $\boldsymbol{E} = -grad\,U$ имеем выражение

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^0 - \frac{1}{4\pi\sigma_0}grad\int_V (\sigma - \sigma_0)\boldsymbol{E}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}dV - \frac{1}{4\pi\sigma_0}grad\int_V \left(\boldsymbol{i}^c - \boldsymbol{i}_0^c\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}dV, \quad (2.6)$$

которое для точек наблюдений вне объема $\boldsymbol{r} \notin V$ является интегральной формулой, а для точек внутри объема $\boldsymbol{r} \in V$ - объёмным векторным интегральным уравнением.

С помощью известных значений напряженности электрического поля в произвольной точке проводящего пространства, зная электропроводность в данной точке, можно определить динамическую характеристику поля $\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}$ – вектор плотности токов проводимости.

2.5 Магнитное поле постоянного тока

Напряженность магнитного поля, создаваемого постоянным током в проводящей среде с локальным неоднородным объектом, можно определить из выражения для вектор-потенциала (2.5) с помощью формулы связи $\boldsymbol{H} = rot\, \boldsymbol{A}$. Выделив слагаемое, соответствующее нормальному магнитному полю источников плотности стороннего тока $\boldsymbol{i}_0^c$ в однородной среде $\boldsymbol{H}^0$

$$\boldsymbol{H}^0 = \frac{1}{4\pi} rot \int\limits_{V_c} \boldsymbol{i}_0^c \frac{dV}{R},$$

получим формулу, подобную закону Био-Савара для объемно распределенных токов [Кормильцев, 2000]

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^0 + \frac{1}{4\pi} rot \int\limits_{V} (\sigma - \sigma_0)\boldsymbol{E} \frac{dV}{R} + \frac{1}{4\pi} rot \int\limits_{V_c} \left(\boldsymbol{i}^c - \boldsymbol{i}_0^c\right) \frac{dV}{R}, \qquad (2.7)$$

которую можно представить в виде $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^0 + \boldsymbol{H}^a + \boldsymbol{H}^{ac}$. Аналогично электрическому полю, аномальное магнитное поле имеет два слагаемых, обусловленных аномальными плотностями токов проводимости и сторонних токов.

2.6 Стационарное электромагнитное поле в неоднородной среде

Введение вспомогательного вектор-потенциала электрического типа и его решение в виде интеграла Пуассона позволяет определить все силовые и динамические характеристики стационарного поля в неоднородной среде.

Примененный выше математический аппарат решения уравнения Пуас-

сона является наиболее простым. При этом формулы для расчета электромагнитного поля стационарного стороннего источника в трехмерной неоднородной среде могут быть получены так же методом функции Грина или с использованием второй формулы Грина [Кормильцев, 2000]. Независимо от способа решения и применяемого математического аппарата результат решения задачи является одинаковым.

Отметим важный практический момент: приведенный выше вид выражений для измеряемых величин электрического и магнитного поля (2.3, 2.6 – 2.7) показывает, что в среде, однородной по электропроводности $\sigma = \sigma_0$, могут возникать аномалии электрического и магнитного поля, связанные с аномальными сторонними токами неэлектрической природы. Токи, текущие в среде $\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}$, иногда называют токами проводимости или токами миграции, а сторонние токи $\boldsymbol{i}^C$ – токами конвекции, диффузии и т.п., в зависимости от происхождения. Метод естественного поля в электроразведке постоянным током как раз посвящен изучению этих явлений в природных средах. Аномалии электромагнитного поля могут быть не связаны с проводящими свойствами среды, которая может быть даже однородной, а связаны с неоднородностями неэлектрического характера, которые создают перераспределение аномальной плотности токов.

В полученных формулах (2.3 – 2.7) аномальные части электромагнитного поля являются суперпозицией полей вторичных источников в виде электрических диполей, обладающих электрическим моментом $\boldsymbol{M}_E = \boldsymbol{i}^a dV = I^a d\boldsymbol{l}$

Представление для потенциала и напряженностей электромагнитного поля в виде объемного интеграла позволяет исследовать поля внутренне неоднородных сред с электропроводностью $\sigma(\boldsymbol{r})$ для точек $\boldsymbol{r} \in V$.

При отсутствии аномальных сторонних токов полученные формулы, описывающие рассеяние электрического и магнитного поля стационарного стороннего источника тока локальным проводящим объектом вида

$$U = U^{o} + \frac{1}{4\pi\sigma_0}\int_V (\sigma-\sigma_0)\boldsymbol{E}\,\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\,dV\,, \qquad (2.8)$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{o} - \frac{1}{4\pi\sigma_0}\,grad\int_V (\sigma-\sigma_0)\boldsymbol{E}\,\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\,dV\,, \qquad (2.9)$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^{0} + \frac{1}{4\pi}\,rot\int_V (\sigma-\sigma_0)\boldsymbol{E}\,\frac{dV}{R}\,, \qquad (2.10)$$

достаточно подробно описаны в литературе [Дмитриев 1973; Georgescu, 1977; Dey, 1979; Barthes, 1980; Ермохин, 1985 и др.].

Интегральные представления стационарного электромагнитного поля.

Аномальные части поля в формулах (2.8-2.10) можно представить в виде двух слагаемых, например для электрического потенциала (2.8)

$$U = U^{o} + \left(U - U^{0}\right) = U^{o} + \frac{1}{4\pi\sigma_0}\int_V \sigma\boldsymbol{E}\,\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\,dV - \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}\,\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\,dV\,.$$

Пределом первого интеграла является локальный объем (или несколько объемов), обладающий удельной электропроводностью, отличающейся от вмещающей среды. Действие второго интеграла, в соответствии с формулой (2.4), распространяется на все проводящее пространство за исключением области, занятой сторонним источником поля.

В однородной среде нормальное поле стороннего источника можно представить в интегральном представлении как

$$U^{o} = \frac{1}{4\pi\sigma_0}\int \boldsymbol{i}_0\,\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\,dV\,,\ \boldsymbol{E}^{o} = -\frac{1}{4\pi\sigma_0}\,grad\int \boldsymbol{i}_0\,\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\,dV\,,\ \boldsymbol{H}^{0} = \frac{1}{4\pi}\,rot\int\frac{\boldsymbol{i}_0}{R}\,dV\,. \quad (2.11)$$

Вектор-потенциал в интегральном виде представляется как

$$\boldsymbol{A}^{0} = \frac{\sigma_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{E}}{R}\,dV = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{i}_0}{R}\,dV$$

с формулами связи, $\boldsymbol{E}^{0} = -gradU^{0}$ и $\boldsymbol{H} = rot\,\boldsymbol{A}$.

В работах [Бурсиан, 1972; Гринберг, 1948; Зоммерфельд, 1958; Краев, 1965] показано, что характеристик источника стороннего тока достаточно

для определения величин нормального электромагнитного поля в однородной или кусочно-однородной среде. Для системы токов, замыкающихся от стороннего источника через проводящую среду, в приведенных выражениях (2.11) интегрирование по системе токов в источнике заменено интегрированием по токам растекания в окружающей среде.

Заключение.

Поляризацию локального объекта с удельной электропроводностью σ, находящегося в однородной проводящей среде с электропроводностью σ_0, постоянным электрическим полем стороннего источника, можно описать как образование системы вторичных токовых электрических диполей, возникающих в центрах элементарных объемов dV и обладающих аномальным электрическим моментом

$$\boldsymbol{M}_E = (\sigma - \sigma_0)\,\boldsymbol{E}dV = \boldsymbol{i}^a dV = I^a d\boldsymbol{l}\,.$$

Аномальное электромагнитное поле локального 3D объекта является суперпозицией полей вторичных источников в виде электрических диполей.

Г л а в а 3

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ СТОРОННИХ ИСТОЧНИКОВ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В предыдущей главе было показано, что поляризацию локального объекта постоянным электрическим полем можно описать как образование системы вторичных токовых электрических диполей. Количественной характеристикой поляризации объекта является плотность аномальных токов проводимости. В случае гармонического режима поля источника в процессе поляризации локального объекта участвуют не только токи проводимости, но и токи индукции, возникающие в проводящей среде. Ввиду дипольного характера поляризации в этой главе рассмотрим более детально поля дипольных источников электрического и магнитного типов при гармоническом режиме поля и волновые уравнения электромагнитного поля.

Система уравнений Максвелла для комплексных амплитуд гармонического электромагнитного поля, создаваемого сторонним источником тока плотностью $\boldsymbol{i}^c$, изменяющегося по закону $\exp(j\omega t)$ в проводящей среде, в квазистационарном приближении для ближней (индукционной) зоны имеет вид

$$\begin{cases} rot\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}, & \text{III.1} \\ rot\,\boldsymbol{E} = -j\omega\boldsymbol{B}, & \text{III.2} \\ div\,\boldsymbol{i} = 0, & \text{III.3} \\ div\,\boldsymbol{B} = 0. & \text{III.4} \end{cases}$$

Первые два уравнения системы III.1 – III.2 описывают перекрестные эффекты, когда одно поле является причиной появления другого:

- возникновение вихря магнитного поля при течении токов (закон Био-Савара);

- возникновение вихря электрического поля при изменении магнитного поля (закон Фарадея).

В главе 1 было отмечено, что токи проводимости в среде могут иметь различную природу происхождения: токи течения флюидов в проницаемой среде, токи диффузии вещества в пористой среде, термоэлектричество, пьезоэлектричество и т.д. В этих случаях плотность тока линейно связана с плотностью потока поля источника и является наиболее простой [Кормильцев, 2000].

Для гармонического электромагнитного поля уравнения связи электрического и магнитного полей существенно сложнее и согласно двум первым уравнениям Максвелла описываются вихрями поля. Взаимное влияние и совместное действие полей двух видов в физике называют парным (или смешанным) физическим эффектом. В гармоническом электромагнитном поле необходимо учитывать оба эффекта – парный и перекрестный.

Последние два уравнения III.3 – III.4 системы выражают основные свойства неразрывностей плотности полного тока и магнитного поля и имеют в электродинамике важнейшую роль, наряду с законами сохранения энергии, момента и импульса в физике.

Уравнение неразрывности плотности полного тока III.3 имеет особое значение в случае стационарного режима стороннего источника, поскольку именно из него может быть получено уравнение для напряженностей электрического поля для неоднородной среды и его решение вида (2.6).

Система уравнений Максвелла дополняется двумя формулами связи: одно из них связывает напряженность и индукцию магнитного поля $\boldsymbol{B} = \mu\mu_0 \boldsymbol{H}$; второе раскрывает содержание плотности полного тока $\boldsymbol{i}$ в первом уравнении системы, которую запишем в виде

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}^p + \boldsymbol{i}^i + \boldsymbol{i}^c . \qquad (3.1)$$

В формуле плотность полного тока представлена как сумма плотностей всех видов токов:

- токов проводимости, обусловленных движением зарядов под действием Кулоновской силы, действующей со стороны электрического поля $\boldsymbol{i}^{p} = \sigma \boldsymbol{E}$;
- токов индукции, обусловленных замкнутым движением зарядов под действием силы Фарадея, действующей со стороны переменного магнитного поля в соответствии с уравнением (III.2) $\boldsymbol{i}^{i}$;
- сторонних токов $\boldsymbol{i}^{c}$, являющихся источником возникновения электромагнитного поля в среде.

В квазистационарном случае можно пренебрегать токами смещения в проводящей среде $\boldsymbol{i}^{см} = j\omega \boldsymbol{D} = j\omega\varepsilon\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ по сравнению с токами проводимости. В общем случае высоких частот тока в источнике, когда их учет уже становится необходим, дополнительный вклад токов смещения можно учесть введением величины комплексной удельной электропроводности $\hat{\sigma} = \sigma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0$, т.е. $\boldsymbol{i}^{t} = \boldsymbol{i}^{p} + \boldsymbol{i}^{см} = \hat{\sigma}\boldsymbol{E}$ и плотность полного тока рассматривать как $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}^{t} + \boldsymbol{i}^{i} + \boldsymbol{i}^{c}$. Распространение высокочастотного электромагнитного поля в неоднородной среде, подчиняющееся законам геометрической оптики, является объектом особого рассмотрения и достаточно подробно исследовано и изложено во многих научных работах, например, очень подробно в двухтомной монографии [Исимару, 1981].

Отметим существенное отличие плотности токов проводимости от плотности индукционных токов.

Токи проводимости в проводящей среде существуют как в случае стационарного, так и переменного режима тока в источнике. Вектор плотности тока проводимости имеет три пространственные составляющие и в изотропной среде направлен вдоль вектора напряженности электрического поля.

Индукционные токи возникают в проводящей среде под действием магнитного поля, существуют только при переменном режиме тока в источнике и всегда замкнуты. В главе 1 для описания действия переменного магнитного поля на заряды введено понятие силы Фарадея. В проводящем контуре мало-

го радиуса, ориентированного в плоскости, ортогональной вектору магнитного поля, вектор индукционного тока в цилиндрических координатах с направлением магнитного поля вдоль полярной оси *z* имеет одну азимутальную составляющую, поэтому вихрь плотности индукционного тока описывается как

$$\sigma rot_{\varphi}\boldsymbol{E}^{i} = rot_{\varphi}\boldsymbol{i}^{i} = -j\omega\mu_0\sigma H_z = -k^2 H_z,$$

здесь k - волновое число среды; $grad_{\varphi}\sigma = 0$, иное бы означало, что в проводящем замкнутом контуре есть разрыв.

3.1 Электромагнитное поле стороннего источника электрического типа

К сторонним источникам электрического типа будем относить источники в виде элементарного электрического диполя и их суперпозиции для заземленной на концах линии. При постоянном режиме тока источника в проводящей среде создаются только токи проводимости $\boldsymbol{i}^{t}$. При переменном режиме тока магнитное поле индуцирует в окружающей проводящей среде токи индукции $\boldsymbol{i}^{i}$.

Из уравнения непрерывности плотности полного тока $div\,\boldsymbol{i} = 0$ следует, что токи проводимости в проводящем пространстве создаются сторонними токами, истекающими из объема V_C, занимаемого этим источником и направленными по нормали к его поверхности

$$I^{c} = -\int_{V_c} div\,\boldsymbol{i}^{c} dV_c = -\oint_{S} i_n^{c} dS. \qquad (3.2)$$

Здесь учтено положительное направление нормали внутрь к поверхности, ограничивающей объем стороннего источника [Тихонов, 1977]. Убывание тока внутри объема источника означает, что он истекает из объема наружу, что соответствует его положительной величине.

Электрическое поле источника в однородной среде называют нормальным полем и обозначают как $\boldsymbol{E}^{o}$. В однородной среде с удельной электропроводностью $\sigma_0 = const$ из (III.1), (III.2) с учетом (3.1)

$$rot\ rot\boldsymbol{E}^0 = -j\omega\mu_0 rotH = -j\omega\mu_0\left(\boldsymbol{i}^t + \boldsymbol{i}^i + \boldsymbol{i}^c\right) = -j\omega\mu_0\sigma_0\left(\boldsymbol{E}^t + \boldsymbol{E}^i\right) - j\omega\mu_0\boldsymbol{i}^c$$

откуда, поскольку сумма $\boldsymbol{E}^t + \boldsymbol{E}^i = \boldsymbol{E}^0$ есть полное электрическое поле, создаваемое источником в окружающей среде, получим волновое уравнение для напряженности электрического поля стороннего гармонического источника в однородной среде

$$rot\ rot + k_0^2\ \ \boldsymbol{E}^0 = -j\omega\mu_0\boldsymbol{i}^c, \qquad (3.3)$$

где $k_0 = \sqrt{j\omega\mu_0\sigma_0}$ – волновое число среды.

Дифференциальное уравнение (3.3) учитывает как токи растекания, так и токи индукции, создаваемые сторонним источником $\boldsymbol{i}^c$ в окружающей среде. Решение этого уравнения, записываемое в матричном виде с использованием соотношения $rot\ rot\boldsymbol{E}^0 = grad\ div\boldsymbol{E}^0 - \Delta\boldsymbol{E}^0$ для точек $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3)$ и $\boldsymbol{r}'(x'_1, x'_2, x'_3)$ как

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} - \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\delta_{mn} + k_0^2\delta_{mn}\right)E_m^0(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu_0\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')i_n^c(\boldsymbol{r}'),$$

где $\delta_{mn} = \begin{cases} 0, \text{при } m \neq n \\ 1, \text{при } m = n \end{cases}$ - символ Кронекера,

$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ - дельта-функция Дирака,

имеет вид интеграла свертки по объему V_C, занимаемому сторонним источником

$$E_m^0(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu_0 \int_{V_c} G_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}')i_n^c(\boldsymbol{r}')dV\,. \qquad (3.4)$$

Уравнение для тензорной функции Грина $G_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}')$ получим, подставив (3.4) в (3.3). Тензорная функция Грина удовлетворяет уравнению, подобному (3.3) и имеющему матричный вид

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_m} - \frac{\partial^2}{\partial r_l^2}\delta_{im} + k_0^2\delta_{im}\right\}G_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}') = \delta_{in}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \qquad (3.5)$$

с решением для безграничного пространства вида (Приложение 1) [Финкельберг, 1964]

$$G_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi k_0}\left\{\frac{\partial^2}{\partial r_m \partial r_n} - k_0^2\delta_{mn}\right\}\frac{exp(-k_0 R)}{R}, \quad R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|.$$

Интегральное представление для нормального электрического поля стороннего источника представим в виде

$$E_m^o(\boldsymbol{r}) = \int_{V_c} \overline{G}_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}') i_n^c(\boldsymbol{r}') dV, \qquad (3.6)$$

где функцию Грина

$$\overline{G}_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\sigma_0}\left\{\frac{\partial^2}{\partial r_m \partial r_n} - k_0^2\delta_{mn}\right\}\frac{exp(-k_0 R)}{R}$$

можно интерпретировать как [Hohmann, 1975]

m - компоненту электрического поля, в точке

$\boldsymbol{r}$ - наблюдений, создаваемую переменным электрическим диполем с единичным моментом, ориентированным в направлении

n - оси системы координат и находящимся в точке

$\boldsymbol{r}'$ - системы координат.

Для стороннего источника в виде элементарного электрического диполя, находящегося в точке $\boldsymbol{r}'$ с плотностью тока $i_n^c(\boldsymbol{r}') = I^c(\boldsymbol{r}')dl_n\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ формула для расчета нормального электрического поля (3.6) в однородной проводящей среде запишется как

$$E_m^0(\boldsymbol{r}) = \frac{I^c dl_n}{4\pi\sigma_0}\left\{\frac{\partial^2}{\partial r_m \partial r_n} - k_0^2\delta_{mn}\right\}\frac{exp\ -k_0 R}{R}. \qquad (3.7)$$

Для заземленной на концах линии или незаземленного контура, с переменным током, электрическое поле определяется суперпозицией полей элементарных диполей вдоль линии или контура с учетом пространственной конфигурации.

Отметим особо – в волновом уравнении для напряженности электриче-

ского поля стороннего гармонического дипольного источника (3.3) и в его решении (3.7) для однородной проводящей среды учтены как токи проводимости, так и токи индукции.

Для напряженности магнитного поля из первого уравнения системы Максвелла (III.1) для однородной среды, с учетом $div\boldsymbol{H} = 0$, имеем уравнение

$$\Delta\boldsymbol{H} = -\sigma_0 rot\left(\boldsymbol{E}^t + \boldsymbol{E}^i\right) - rot\,\boldsymbol{i}^c(\boldsymbol{r}),$$

откуда, поскольку сумма $\boldsymbol{E}^t + \boldsymbol{E}^i = \boldsymbol{E}$ есть полное электрическое поле, используя второе уравнение системы Максвелла (III.2), получим для нормального магнитного поля $\boldsymbol{H}^0$ векторное уравнение Гельмгольца

$$\{\Delta - k_0^2\}\boldsymbol{H}^0 = -rot\,\boldsymbol{i}^c(\boldsymbol{r}). \qquad (3.8)$$

Это уравнение можно рассматривать в виде трех независимых скалярных уравнений, сумму решений которых можно представить в виде [Никольский, 1989; Hvozdara, 1983; Weidelt, 1975]

$$H_m^0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_c} rot_m' g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\boldsymbol{i}^c(\boldsymbol{r}')dV, \qquad (3.9)$$

где скалярная функция Грина $g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{\Delta - k_0^2\right\}g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$

с известным решением для безграничного пространства (Приложение 1) [Тихонов, 1977]

$$g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \frac{exp(-k_0 R)}{R}, \quad R = \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|. \qquad (3.10)$$

Подставив функцию Грина в (3.9), получим формулу

$$H_m^0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_c} rot_m' \frac{exp(-k_0 R)}{R}\boldsymbol{i}^c(\boldsymbol{r}')dV. \qquad (3.11)$$

Преобразуем интеграл с помощью $arot\boldsymbol{A} = rot(a\boldsymbol{A}) - [grada, \boldsymbol{A}]$ и запишем в матричном виде:

$$\int_{V_c} \delta_{m\ell n} \frac{\partial}{\partial r'_\ell} \left[\frac{exp(-k_0 R)\boldsymbol{i}^c(\boldsymbol{r}')}{R} \right] dV - \int_{V_c} \delta_{m\ell n} \frac{\partial}{\partial r'_\ell} \frac{exp(-k_0 R)}{R} \cdot \boldsymbol{i}_n^c(\boldsymbol{r}') dV$$

где: $\delta_{m\ell n} = \begin{cases} +1, & \text{при четной перестановке индексов} \\ -1, & \text{при нечетной перестановке индексов} \\ 0, & \text{при повторяющихся индексах} \end{cases}$ - тензор Леви-Чивита.

Рассмотрим первый интеграл, преобразовав его с помощью формулы Остроградского-Гаусса к интегралу по поверхности, ограничивающей объем стороннего источника

$$\int_{V_c} rot' \left[\frac{exp(-k_0 R)\boldsymbol{i}^c(\boldsymbol{r}')}{R} \right] dV = -\oint_S \frac{exp(-k_0 R)}{R} \left[\boldsymbol{i}^c(\boldsymbol{r}'), dS \right] \approx -exp(-k_0 \hat{R}) \oint_S \frac{\left[\boldsymbol{i}^c(\boldsymbol{r}'), dS \right]}{R},$$

где можно пренебречь изменением фазы тока в пределах объема источника. Для источника поля электрического типа (3.2) следует, что первый интеграл равен нулю, поскольку вектор плотности тока источника имеет направление по нормали к поверхности, ограничивающей его объем.

Во втором интеграле перейдем от производных по точкам объема $\boldsymbol{r}'$ к производным по точкам наблюдений $\boldsymbol{r}$, используя соотношение

$$grad' \frac{1}{R} = -grad \frac{1}{R}$$

в результате получим интегральное представление для нормального магнитного поля стороннего источника в векторном виде

$$\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} rot \int_V \frac{exp(-k_0 R)}{R} \boldsymbol{i}^c(\boldsymbol{r}') dV,$$

или в матричном виде

$$H_m^0(\boldsymbol{r}) = \int_{V_c} W_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}') i_n^c(\boldsymbol{r}') dV, \qquad (3.12)$$

где функцию Грина

$$W_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi} \delta_{m\ell n} \frac{\partial}{\partial r_\ell} \frac{exp(-k_0 R)}{R},$$

можно интерпретировать как [Hohmann, 1975]

m - компоненту магнитного поля, в точке

$\boldsymbol{r}$ - наблюдений, создаваемую переменным электрическим диполем с единичным моментом, ориентированным в направлении

n - оси системы координат и находящимся в точке

$\boldsymbol{r}'$ - системы координат.

Для стороннего источника в виде элементарного электрического диполя, находящегося в точке $\boldsymbol{r}'$ с плотностью тока $i_n^c(\boldsymbol{r}') = I^c(\boldsymbol{r}')dl_n\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ формула для расчета нормального магнитного поля принимает вид

$$H_m^0(\boldsymbol{r}) = \frac{I^c}{4\pi}\delta_{m\ell n}\frac{\partial}{\partial\, r_\ell}dl_n\frac{exp(-k_0R)}{R}, \qquad (3.13)$$

или

$$\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r}) = \frac{I^c}{4\pi}rot\left(d\boldsymbol{l}\frac{exp(-k_0R)}{R}\right)$$

Магнитное поле заземленной на концах линии, питаемой переменным током, определяется суперпозицией полей, создаваемых элементарными диполями вдоль направления линии с учетом ее пространственной конфигурации. Этот же принцип суперпозиции относится к электромагнитному полю гармонического тока в незаземленном контуре произвольной конфигурации.

Отметим, что в волновом уравнении для напряженности магнитного поля стороннего гармонического дипольного источника (3.8) и в его решении (3.13) для однородной проводящей среды учтены как токи проводимости, так и токи индукции.

Интегральные представления электромагнитного поля стороннего источника (3.6) и (3.12) в случае постоянного режима тока соответствуют выражениям нормального поля, полученным в предыдущей главе (2.11).

Вектор–потенциал электрического типа

В главе 2 приведено выражение для вектор–потенциала электрического типа при стационарном режиме тока в электрическом диполе. Интегральные представления для нормального электромагнитного поля (3.6) и (3.12) для

стороннего гармонического дипольного источника электрического типа (3.2) могут быть получены с помощью вспомогательного вектор–потенциала электрического типа $\boldsymbol{A}$, связанного с напряженностью магнитного поля как [Альпин, 1985, Бурсиан, 1972]

$$\boldsymbol{H} = rot\boldsymbol{A} \tag{3.14}$$

на основании уравнения непрерывности магнитного поля $div\boldsymbol{H} = 0$ и формулы векторного анализа $div\boldsymbol{H} = divrot\boldsymbol{A} = 0$.

Введение вектор–потенциала в первое уравнение системы Максвелла, с учетом соотношения $rot\ rot\boldsymbol{A} = grad\ div\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}$, приводит к уравнению

$$\Delta\boldsymbol{A} = grad\ div\boldsymbol{A} - \sigma_0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{i}^c .$$

Из второго уравнения системы $rot\left(\boldsymbol{E} + j\omega\mu_0\boldsymbol{A}\right) = 0$ следует, что

$$\boldsymbol{E} + j\omega\mu_0\boldsymbol{A} = -gradU ,$$

откуда, подставляя $\boldsymbol{E}$ в исходное уравнение, получим для вектор–потенциала векторное уравнение Гельмгольца

$$\left\{\Delta - k_0^2\right\}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i}^c \tag{3.15}$$

при условии калибровки Лоренца для скалярной потенциальной функции

$$U = -\frac{1}{\sigma_0} div\,\boldsymbol{A},$$

а также формулу связи с напряженностью электрического поля

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sigma_0}\left(grad\ div\,\boldsymbol{A} - k_0^2\boldsymbol{A}\right) \tag{3.16}$$

для точек вне источника.

Уравнение Гельмгольца для вектор-потенциала (3.15) аналогично уравнению (3.8) и имеет решение вида

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_c}\frac{exp(-k_0R)}{R}\boldsymbol{i}^c(\boldsymbol{r}')dV_c . \tag{3.17}$$

Используя формулы связи вектор-потенциала с напряженностями магнитного и электрического поля, получим интегральные представления для

нормального электромагнитного поля, тождественные (3.6) и (3.9).

Для стороннего источника в виде элементарного электрического диполя, находящегося в точке $\boldsymbol{r}'$ с плотностью тока $\boldsymbol{i}^c(\boldsymbol{r}') = I^c(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{l}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ вектор-потенциал электрического типа в однородной среде принимает вид

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{I^c d\boldsymbol{l}}{4\pi}\frac{exp(-k_0 R)}{R},\ R = \left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|. \tag{3.18}$$

Для плотности стороннего тока, распределенной в малом объеме dV_C

$$d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{i}^c(\boldsymbol{r}')}{4\pi}\frac{exp(-k_0 R)}{R}dV_c. \tag{3.19}$$

Полученные формулы для нормального электромагнитного поля и вектор-потенциала электрического типа выражаются через момент токового электрического диполя $\boldsymbol{M}_E = I^c d\boldsymbol{l}$ как

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{M}_E}{4\pi}\frac{exp\ -k_0 R}{R}. \tag{3.20}$$

3.2 Вектор–потенциал магнитного типа.

К сторонним источникам магнитного типа будем относить источники гармонического электромагнитного поля в виде магнитного диполя - элементарного витка малого радиуса и замкнутого контура. Особенностью таких источников является отсутствие гальванической связи между источником и окружающей проводящей средой.

Величины электромагнитного поля можно определить с помощью вектор–потенциала электрического типа (3.18), выполняя интегрирование по замкнутой линейной системе токов источника [Смайт, 1954]

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{I^c}{4\pi}\oint\frac{exp(-k_0 R)}{R}d\boldsymbol{l}.$$

Примечательно, что для замкнутого контура в виде комбинации линейных отрезков с током, вектор-потенциал имеет лишь одну составляющую, совпадающую с направлением тока в элементарном отрезке. Для магнитного диполя вектор-потенциал будет иметь лишь азимутальную составляющую.

Для источника в виде магнитного диполя удобнее сначала определить вектор-потенциал для круглого витка малого радиуса a, а затем величины электромагнитного поля с помощью формул связи (3.14) и (3.16). Для квазистационарного случая с целью упрощения будем учитывать изменение фазы поля только на расстоянии R от точки наблюдений до центра витка ввиду его малости.

Выполняя интегрирование в системе координат с началом в центре витка

$$A_\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{I^c exp(-k_0 R)}{4\pi} \oint \frac{dl_\phi}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \frac{I^c exp(-k_0 R)}{4\pi} 2a \int_0^\pi \frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho\cos\phi}}.$$

Для случая малого радиуса $a < R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ получим [Смайт, 1954; Никольский, 1989]

$$A_\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{I^c exp(-k_0 R)}{4\pi} \frac{\pi a^2 \rho}{R^3} = \frac{I^c S\, exp(-k_0 R)}{4\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{R} \right) = rot_\phi A_z^*, \quad (3.21)$$

где $S = \pi a^2$ – площадь элементарного витка. Из выражения (3.21) видно, что вектор-потенциал электрического типа для магнитного диполя можно выразить через еще более простой вектор $\boldsymbol{A} = rot\boldsymbol{A}^*$ или $\boldsymbol{A} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} rot\boldsymbol{A}^*$, получивший более широкое распространение

$$\boldsymbol{A}^* = -j\omega\mu_0 \frac{\boldsymbol{M}_H}{4\pi} \frac{exp(-k_0 R)}{R} = -j\omega\mu_0 \frac{I^c S\boldsymbol{n}}{4\pi} \frac{exp(-k_0 R)}{R}, \quad (3.22)$$

который называется вектор-потенциалом магнитного типа (В), удовлетворяющий в однородной среде волновому уравнению Гельмгольца, подобному (3.15)

$$\left(\Delta - k_0^2\right)\boldsymbol{A}^* = j\omega\mu_0 \boldsymbol{M}_H \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}').$$

Момент магнитного диполя $\boldsymbol{M}_H = I^c S\boldsymbol{n}$ (А*м^2) направлен по нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости витка S и связан с направлением тока правилом левого винта.

Электромагнитное поле стороннего источника магнитного типа.

Вектор напряженности магнитного поля из (3.14) будет определяться

как [Ильинский, 1991]

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} rot\, rot\boldsymbol{A}^*. \qquad (3.23)$$

Для расчета магнитного поля источника в виде элементарного магнитного диполя с моментом

$$\boldsymbol{M}_H = I^c S\boldsymbol{n}$$

в однородной проводящей среде с учетом соотношения

$$rot\, rot\boldsymbol{A}^* = grad\, div\boldsymbol{A}^* - \Delta\boldsymbol{A}^*$$

и волнового уравнения для точек вне источника

$$\Delta\boldsymbol{A}^* = k_0^2\boldsymbol{A}^*$$

формула принимает матричный вид

$$H_m^0(\boldsymbol{r}) = \frac{I^c Sn}{4\pi}\left\{\frac{\partial^2}{\partial r_m \partial r_n} - k_0^2\delta_{mn}\right\}\frac{exp(-k_0 R)}{R}. \qquad (3.24)$$

Формулу связи напряженности электрического поля с вектор-потенциалом получим из (3.16)

$$\boldsymbol{E} = rot\boldsymbol{A}^* \qquad (3.25)$$

которая для магнитного диполя запишется в матричном виде

$$E_m^0(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu_0\frac{I^c Sn}{4\pi}\delta_{m\ell n}\frac{\partial}{\partial\, r_\ell}\frac{exp(-k_0 R)}{R}$$

или

$$\boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu_0\frac{I^c S}{4\pi} rot\left\{\boldsymbol{n}\frac{exp(-k_0 R)}{R}\right\}. \qquad (3.26)$$

Из последней формулы (3.26) видно, что электрическое поле переменного магнитного диполя имеет чисто индукционный характер, поскольку создается только за счет изменения магнитного поля и удовлетворяет уравнению непрерывности

$$div\boldsymbol{E}^0 = div\, rot\boldsymbol{A}^* = 0.$$

Как и в случае стороннего источника электрического типа, для опреде-

ления величины индукционного электрического поля в однородной среде достаточно знать величину момента источника.

Отметим, если среда является непроводящей, то электромагнитное поле может создаваться только источником индуктивного вида, например, магнитным диполем, током в незаземленном контуре или антенным незаземленным излучателем электромагнитных волн, которые в данной работе мы не рассматриваем. При этом токи в непроводящей среде отсутствуют, возникающее при этом магнитное поле изменяется синфазно с током в источнике, а возникающее электрическое поле – противофазно, поскольку волнового затухания поля в среде не происходит.

Заключение.

Применение метода комплексных амплитуд для гармонического электромагнитного поля в однородной проводящей среде, создаваемого сторонними источниками тока различных типов (электрический или магнитный диполь), позволяет в волновых уравнениях для напряженностей электрического и магнитного полей и в их решениях учесть как плотности токов проводимости, так и плотности токов индукции.

Г л а в а 4

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ СТОРОННЕГО ИСТОЧНИКА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Используемое в настоящее время векторное объемное интегральное уравнение для напряженности гармонического электрического поля и интегральная формула расчета напряженности магнитного поля получены для аномальных токов проводимости, что представлено в многочисленных научных публикациях, отмеченных во введении. Существуют решения более сложного вида, в систему интегральных уравнений которых входят вектора напряженностей и электрического и магнитного поля, учитывающие все неоднородные электромагнитные свойства объекта – электропроводность, диэлектрическую и магнитную проницаемости [Дякин, 2008]. В последнем случае уравнение описывает намагничивание 3D объекта переменным магнитным полем.

Мы повторим вывод интегрального уравнения для напряженности гармонического электрического поля для общности изложения, но еще раз отметим, что это описание рассеяния электромагнитного поля является неполным, поскольку не учитывает возникновение аномальных токов индукции в проводящем объеме и неприменимо к задаче изучения рассеяния поля 3D проводником в непроводящей вмещающей среде.

Линейность электромагнитного поля относительно создающего его тока позволяет определить раздельно напряженности электромагнитного поля, создаваемые сторонними токами $\boldsymbol{i}^C$ в однородной среде (нормальное поле) и

аномальное поле, рассеиваемое локальным проводящим объемом, создаваемое аномальными токами $\boldsymbol{i}^a$ в неоднородной среде. Электромагнитное поле, создаваемое элементарными сторонними источниками в виде электрического и магнитного диполей в однородной по электропроводности среде (нормальное поле), а также вводимые вспомогательные функции – вектор-потенциалы электрического и магнитного типа были рассмотрены в предыдущей главе.

Напомним, что в физических законах и записываемых на их основе дифференциальных уравнениях источник (причина) всегда записывается в правой части равенства, а следствие – в левой. Следовательно, в дифференциальных уравнениях аномальные напряженности гармонического электромагнитного поля необходимо записать как функции аномальных токов проводимости и индукции, возникающих в проводящем объеме. В последнем случае плотность аномальных токов индукции должна быть выражена через изменение магнитной индукции в локальном проводнике. Это обстоятельство является важнейшим при записи дифференциальных соотношений.

Представим электромагнитное поле в неоднородной среде в виде двух слагаемых $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^0 + \boldsymbol{E}^a$ и $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^0 + \boldsymbol{H}^a$, здесь $\boldsymbol{E}^0$ и $\boldsymbol{H}^0$ – нормальное электромагнитное поле стороннего источника $\boldsymbol{i}^C(\boldsymbol{r}')$ в однородной среде с электропроводностью σ_0, $\boldsymbol{E}^a$ и $\boldsymbol{H}^a$ – аномальное электромагнитное поле, рассеиваемое локальной неоднородностью объемом V с электропроводностью $\sigma(\boldsymbol{r}) = \sigma_0 + \Delta\sigma(\boldsymbol{r})$ для точек $\boldsymbol{r} \in V$.

При выводе волновых уравнений для напряженностей электрического и магнитного поля стороннего гармонического источника (3.3) и (3.8) были учтены как токи растекания, так и токи индукции, возникающие в однородной проводящей среде. В этом помогает применяемый математический аппарат метода комплексных амплитуд.

Если из волнового уравнения для напряженности электрического поля в неоднородной среде, получаемого из системы уравнений Максвелла

$$\{rot\ rot + k_0^2\}\boldsymbol{E} = -j\omega\mu_0(\boldsymbol{i}^a + \boldsymbol{i}^c) = -j\omega\mu_0(\boldsymbol{i}^{at} + \boldsymbol{i}^{ai} + \boldsymbol{i}^c)$$

из правой части исключить плотность стороннего тока источника и, соответственно, из левой части связанное с ним нормальное поле в однородной среде, что соответствует правой и левой частям уравнения (3.3), то для аномальной части электрического поля $\boldsymbol{E}^a$ в точках вне стороннего источника получим волновое уравнение для напряженности аномального электрического поля в неоднородной среде

$$\{\,rot\ rot + k_0^2\,\}\boldsymbol{E}^a = -j\omega\mu_0(\,\boldsymbol{i}^{at} + \boldsymbol{i}^{ai}\,). \qquad (4.1)$$

В правой части полученного уравнения источниками аномальной части электрического поля являются аномальные плотности токов проводимости $\boldsymbol{i}^{at} = \Delta\sigma\boldsymbol{E}$ и токов индукции $\boldsymbol{i}^{ai} = \Delta\sigma\boldsymbol{E}^i$, возникающие в локальном проводящем объекте согласно закону индукции Фарадея. Отметим, что токи индукции, возникающие в однородной вмещающей среде с удельной электропроводностью σ_0, в волновых уравнениях для напряженностей электрического (3.3) и магнитного поля (3.8) учтены введением слагаемых $k_0^2\boldsymbol{E}$ и $k_0^2\boldsymbol{H}$ в левые части волновых уравнений.

Будем рассматривать аномальную напряженность электрического поля как суперпозицию $\boldsymbol{E}^a = \boldsymbol{E}^{at} + \boldsymbol{E}^{ai}$, обусловленную электрическим (токи проводимости) и магнитным (токи индукции) возбуждением локального неоднородного объема *V*.

4.1 Электромагнитное поле при электрическом возбуждении проводящего 3D объекта.

Рассмотрим аномальную часть электрического поля $\boldsymbol{E}^{at}$, обусловленную аномальными токами проводимости

$$\{\,rot\ rot + k_0^2\,\}\boldsymbol{E}^{at} = -j\omega\mu_0\boldsymbol{i}^{at} \qquad (4.2)$$

которое аналогично уравнению (3.3) и имеет решение в матричном виде, по-

добном (3.6) [Дмитриев, 1969; Raiche, 1974; Таборовский, 1975; Hohmann, 1975; Weidelt, 1975]

$$E_m^{at}(\boldsymbol{r}) = \int_V \overline{G}_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}')i_n^{at}(\boldsymbol{r}')dV \text{ , т.е.}$$

$$E_m^{at}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_0}\int_V \left\{\frac{\partial^2}{\partial r_m \partial r_n} - k_0^2\delta_{mn}\right\}\frac{exp(-k_0 R)}{R}\Delta\sigma(\boldsymbol{r}')E_n(\boldsymbol{r}')dV, \quad (4.3)$$

или в векторном виде

$$\boldsymbol{E}^{at}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_0}(grad\ div - k_0^2)\int_V \frac{exp(-k_0 R)}{R}\Delta\sigma(\boldsymbol{r}')E(\boldsymbol{r}')dV,$$

которое подобно уравнению поля для аномальной плотности гармонических токов, впервые представленному в работе [Стрэттон, 1948].

Напряженность аномального магнитного поля, создаваемого аномальными токами проводимости, можно определить из векторного уравнения Гельмгольца, получаемого из первого уравнения системы Максвелла с учетом $div\boldsymbol{H} = 0$

$$\left\{\Delta - k_0^2\right\}\boldsymbol{H}^{at} = -rot\ \boldsymbol{i}^{at}, \quad (4.4)$$

которое подобно уравнению для нормального магнитного поля стороннего источника (3.8) и имеет решение в виде интегральной формулы, подобной (3.12)

$$H_m^{at}(\boldsymbol{r}) = \int_V W_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}')\Delta\sigma E_n(\boldsymbol{r}')dV,$$

или в векторном виде [Hohmann, 1975]

$$\boldsymbol{H}^{at}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} rot\int_V \frac{exp(-k_0 R)}{R}\boldsymbol{i}^{at}(\boldsymbol{r}')dV. \quad (4.5)$$

В стационарном случае эта формула тождественна закону Био-Савара для магнитного поля, создаваемого объемно распределенной плотностью аномального тока $\boldsymbol{i}^{at} = \Delta\sigma\boldsymbol{E}$.

Вектор-потенциал электрического типа аномального тока проводимости.

Из вида формул для аномальных напряженностей электромагнитного поля при электрическом возбуждении (4.3) и (4.5) следует, что они могут быть представлены в виде суперпозиции полей от элементарных объемов

$$\boldsymbol{E}^{at}(\boldsymbol{r}) = \int_V d\boldsymbol{E}^{at}(\boldsymbol{r}) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{H}^{at}(\boldsymbol{r}) = \int_V d\boldsymbol{H}^{at}(\boldsymbol{r}),$$

выражаемых через вектор-потенциал электрического типа для элементарного объема как

$$d\boldsymbol{E}^{at} = \frac{1}{\sigma_0}\left\{grad\ div - k_0^2\right\} d\boldsymbol{A} \quad \text{и} \quad d\boldsymbol{H}^{at} = rot\ d\boldsymbol{A} \tag{4.6}$$

где вектор-потенциал представлен через аномальную плотность тока проводимости $\boldsymbol{i}^{at} = \Delta\sigma\boldsymbol{E}$ в виде, подобном (3.19)

$$d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \Delta\sigma(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')}{4\pi}\frac{exp(-k_0 R)}{R}dV \tag{4.7}$$

или в дипольном представлении при $\Delta\sigma\boldsymbol{E}dV = I^a d\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{I^a d\boldsymbol{l}}{4\pi}\frac{exp(-k_0 R)}{R} \tag{4.8}$$

и удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца, аналогичному (3.15)

$$\left\{\Delta - k_0^2\right\} d\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i}^{at}.$$

4.2 Вектор–потенциал магнитного типа аномального тока индукции

Вклад в аномальную часть электромагнитного поля, создаваемую токами индукции $\boldsymbol{i}^{ai} = \Delta\sigma\boldsymbol{E}^{i}$, не может быть определен с использованием математического аппарата дифференциальных уравнений, примененного выше. Это связано с тем, что явного выражения для индукционной напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}^{i}$ через изменение магнитного поля не существует, поскольку ЭДС индукции, согласно закону Фарадея, возникает лишь в замкну-

том проводящем контуре. Для индукционной напряженности поля есть только дифференциальная и интегральная формы закона. В главе 2 отмечалось, что величина индукционной напряженности электрического поля имеет в замкнутом круговом контуре лишь азимутальное направление и может быть определена из закона Фарадея в интегральной форме как ЭДС индукции, отнесенная к длине элементарного замкнутого контура (1.11). Для вихря плотности индукционных токов может быть получено выражение лишь для кусочно-однородной среды, например для горизонтально-слоистых, цилиндрически или сферически неоднородных сред.

В работах [Борн, 1970; Смайт, 1954] показано, что решение задачи рассеяния гармонического электромагнитного поля на локальном проводящем объекте в виде шара в аналитическом виде представляет собой суперпозицию двух линейно независимых полей, создающих две моды поля. Первая мода с нулевым радиальным магнитным полем называется электрической волной (или поперечной магнитной волной), а решение с нулевым радиальным электрическим полем - магнитной волной (или поперечной электрической волной). Каждая из волн удовлетворяет соответствующему скалярному потенциалу (потенциал Дебая). В случае, когда длина волны во вмещающей среде превышает размеры шара (шар в пучности стоячей волны), первая мода оказывается связанной с электрическим диполем, помещенным в центре шара, момент которого параллелен вектору напряженности первичного электрического поля. Вторая мода связана с магнитным диполем, момент которого параллелен вектору напряженности первичного магнитного поля [Дивильковский, 1939; Смайт, 1954].

Полученное решение в виде двух слагаемых поля является наиболее показательным с точки зрения учета двух сил, действующих на заряды со стороны переменных электрического и магнитного полей.

Будем полагать, что для тела произвольной формы, разделенного на элементарные объемы, аномальное поле от каждого элемента объема создается также совокупностью электрических и магнитных диполей, возникаю-

щих в его центре. Необходимо получить систему интегральных уравнений для определения моментов этих диполей с учетом их взаимного влияния. Необходимость учета индукционного возбуждения отмечалась в научной литературе, посвященной рассеянию гармонического электромагнитного поля на локальном проводящем объеме. Так, в работе [Морс, Фешбах, 1960, с.814] представлено выражение для вектор-потенциала, описывающего поле двух индуцированных электрического и магнитного диполей в центре проводящего тела размером, малым по сравнению с длиной гармонической электромагнитной волны.

Для определения вклада в аномальную часть электромагнитного поля токов индукции представим аномальные напряженности поля в виде суперпозиции полей от элементарных магнитных диполей, возникающих в центре элементарного объема dV под действием переменного магнитного поля. Составляющие напряженностей связаны с вектор-потенциалом магнитного типа $\boldsymbol{A}^*$ соотношениями вида, подобного (3.23) и (3.25)

$$d\boldsymbol{H}^{ai} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} rot\, rot\, \boldsymbol{A}^* \text{ и } d\boldsymbol{E}^{ai} = rot\, \boldsymbol{A}^*. \qquad (4.9)$$

В неоднородной среде вектор-потенциал магнитного типа (3.22) выразим подобно электрическому типу (4.8) через аномальный ток, создаваемый переменным магнитным полем в каждом элементарном проводящем объеме

$$\boldsymbol{A}^* = -j\omega\mu_0 \frac{I^a S\boldsymbol{n}}{4\pi} \frac{exp(-k_0 R)}{R} = -j\omega\mu_0 \frac{\boldsymbol{M}_H}{4\pi} \frac{exp(-k_0 R)}{R}. \qquad (4.10)$$

Магнитный момент элементарного проводящего объема

В главах 2 и 3 было показано, что поляризацию локального объекта с удельной электропроводностью σ в однородной проводящей среде с электропроводностью σ_0 постоянным или гармоническим электрическим полем, возникающим под действием стороннего источника, можно описать как образование системы вторичных токовых электрических диполей, возникающих в элементарных объемах dV и обладающих аномальным электрическим

моментом

$$\boldsymbol{M}_E = \left(\sigma - \sigma_0\right)\boldsymbol{E}dV = \boldsymbol{i}^a dV = I^a d\boldsymbol{l}\,.$$

Величина аномальных токов индукции в выражении для магнитного момента $\boldsymbol{M}_H = I^a S\boldsymbol{n}$ должна быть выражена через их источник – изменение магнитной индукции в локальном проводнике малого объема *dV*.

ЭДС индукции, согласно интегральной форме закона Фарадея (1.7), возникает только в замкнутом контуре. По этой причине вектор напряженности электрического поля, имеющий в круговом контуре малого размера лишь азимутальное направление, может быть определен как величина ЭДС индукции, отнесенная к длине элементарного контура длиной *L*. Выражая напряженность электрического поля через изменение напряженности магнитного поля, пересекающей замкнутый контур площадью *S*, для гармонического режима изменения поля получим

$$E_\phi^{\,i} = -\mu_0 \frac{dH_n}{dt}\frac{S}{L} = -j\omega\mu_0 H_n w,$$

где *w* – геометрический коэффициент (м), равный для кругового витка малого радиуса *a* отношению его площади к длине окружности $w = a/2$.

Зависимость азимутальной составляющей плотности тока

$$i_\varphi^{\,a} = \Delta\sigma E_\varphi^{\,i} = -\Delta k^2 H_n \frac{S}{L}, \text{ где: } \Delta k^2 = j\omega\mu_0\Delta\sigma\,.$$

Отсюда, интегрируя по всей площади сечения, пересекаемого вектором плотности тока, получим величину аномальной силы тока

$$I^a = \Delta\sigma\int_S E_\phi dS = -j\omega\mu_o\Delta\sigma H_n \frac{1}{2}\int_0^h\int_0^a r dr dz = -\Delta k^2\frac{H_n a^2 h}{4} = -\Delta k^2\frac{H_n}{4\pi}dV$$

и момент вектор-потенциала магнитного типа для точек внутри элементарного объема запишем как

$$\boldsymbol{M}_H = I^a S\boldsymbol{n} = -\Delta k^2 \boldsymbol{H}S\boldsymbol{n}dV/c\,,$$

где S – сечение элементарного объема *dV* в направлении, ортогональном направлению магнитного поля $\boldsymbol{H}$.

Можно использовать обозначение ориентированной площадки $\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор, направленный по нормали к площадке S вдоль вектора напряженности магнитного поля. Константа c зависит от геометрической формы элементарного объема и для цилиндра с азимутальным вектором плотности тока c = 4π.

Для точек, удаленных от проводящего объема, момент вектор-потенциала магнитного типа (называемый магнитным моментом системы) имеет интегральный вид [Джексон, 1965; Ландау, Лифшиц, 1988; Матвеев, 1980; Стрэттон, 1948; Тамм, 1954]

$$\boldsymbol{M}_H = I^a S\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}\int_V \left[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{i}^a\right] dV .$$

Получим выражения магнитного момента для элементарных объемов простой геометрической формы в виде цилиндра, шара и виде прямоугольного параллелепипеда, чтобы определить влияние геометрической формы.

Для элементарного объема в виде цилиндра высотой h и радиусом a, с направлением магнитного поля по нормали $\boldsymbol{n}$ к основанию S, выполняя интегрирование по объему, получим для составляющей момента

$$M_{H_n} = -\Delta k^2 H_n \frac{1}{4}\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 dr d\varphi dz = -\Delta k^2 H_n \frac{\pi a^4 h}{8}. \qquad (4.11)$$

Для элементарного объема в виде шара магнитный момент можно получить суммированием токов в листках Ампера в объеме шара. Согласно теореме Ампера, магнитное поле H кругового линейного тока силой I эквивалентно полю магнитного листка в том случае, если плотность магнитных моментов диполей, образующих листок, численно равна силе тока [Тамм, 1954]. Сила тока одного листка Ампера dJ^a от элементарного кольца радиуса r, толщиной dh и шириной dr будет равна

$$dJ^a = i_\varphi^a dr\, dh = -\Delta k^2 H_n \cdot \frac{r\, dr\, dh}{2}.$$

Магнитное поле dH_n^a одного листка Ампера на оси OZ при z >> a будет

равно

$$dH_n^a = \frac{1}{2z^3} \int_0^{r=\sqrt{a^2-h^2}} r^2 dJ^a ,$$

где h - расстояние от плоскости листка до экваториальной плоскости. Магнитное поле от всех листков, находящихся в объеме шара будет равно

$$H_n^a = -\frac{\Delta k^2 H_n}{4z^3} \int_{-a}^{a} \int_0^{r=\sqrt{a^2-h^2}} r^3 dr\, dh = -\frac{\Delta k^2 H_n a^5}{30} \cdot \frac{2}{z^3},$$

откуда момент всех листков, находящихся в объеме шара

$$M_{H_n} = -\Delta k^2 H_n \frac{4\pi a^5}{30}. \qquad (4.12)$$

Полученное выражение для магнитного момента элементарного шара можно сопоставить с аналитическим решением, полученным в работе [Дивильковский, 1939] для случая, когда длина волны во вмещающей среде значительно превышает размеры шара (шар в пучности стоячей волны). Для шара радиусом a с электропроводностью σ, находящегося в однородном магнитном поле, направленном по полярной оси Z при $\theta = 0^o$, $r = z$, аномальная часть магнитного поля при малом параметре шара P равна

$$H_r^a = H_z^a = -H_z^0 P \frac{a^3}{r^3} = -\omega \mu_0 \sigma \frac{H_z^0}{15} \frac{a^5}{z^3}.$$

Приближенное выражение для параметра $P \approx \omega \mu_0 \sigma a^2 / 15$ соответствует малому параметру поля P внутри шара (шар малого радиуса). Поскольку для магнитного диполя с моментом M_z, направленным по оси Z

$$H_z^a = \frac{M_z}{4\pi} \cdot \frac{2}{z^3},$$

то момент малого шара, эквивалентного магнитному диполю

$$M_{H_n} = -\omega \mu_0 \sigma H_z^0 \frac{4\pi a^5}{30},$$

получаем тождественно равным моменту, полученному выше с помощью ли-

стков Ампера (4.12).

Выполняя аналогичные действия для элементарного объема dV в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами длиной d_1, d_2, d_3, получим

$$M_{H_n} = -\Delta k^2 H_n \frac{d_1 d_2 d_3}{32 d_n} dV . \qquad (4.13)$$

Из приведенных выражений видно, что моменты элементарных объемов простой геометрической формы являются близкими по значениям. Величины моментов шара и куба относятся друг к другу как $3{,}2/\pi \approx 1$.

Выражение для вектора магнитного момента будем записывать как

$$\boldsymbol{M}_H = I^a S\boldsymbol{n} = -\Delta k^2 \boldsymbol{\Phi} dV , \qquad (4.14)$$

где для $dV = d\boldsymbol{\xi} \cdot d\eta \cdot d\zeta$ с помощью

$$\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\xi} H_{\xi} d\eta \cdot d\zeta + \boldsymbol{\eta} H_{\eta} d\boldsymbol{\xi} \cdot d\zeta + \boldsymbol{\zeta} H_{\zeta} d\boldsymbol{\xi} \cdot d\eta) / c$$

обозначен новый арифметический вектор, составленный из произведений проекций вектора напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$, пересекающего малый объем dV в ортогональных направлениях, на площадь сечения элементарного объема по направлению магнитного поля.

В отличие от традиционно используемой в электродинамике физической величины скалярного потока магнитной индукции $\Phi = \int_S B_n dS$, введенное обозначение нового вектора $\boldsymbol{\Phi}$ позволяет учитывать ориентировку плоскости элементарной площадки (сечения элементарного объема), в которой создается вихрь вектора индукционной плотности тока. Введенный вектор $\boldsymbol{\Phi}$ можно называть вектором потока напряженности магнитного поля. При этом константа в знаменателе c относится к каждому элементарному объему.

Из полученного выражения (4.14) видно, что вектор магнитного момента выражен через изменение величины магнитного поля, пересекающего элементарный объем.

Подставляя полученное выражение магнитного момента в исходную формулу для вектор–потенциала магнитного типа (4.10), имеем

$$\boldsymbol{A}^{*} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi}\Delta k^2 \boldsymbol{\Phi}\frac{exp(-k_0 R)}{R}dV\,. \qquad (4.15)$$

4.3 Электромагнитное поле при магнитном возбуждении проводящего 3D объекта

Используя формулы связи (4.9) перейдем от вектор–потенциала магнитного типа (4.15) к величинам аномальных напряженностей электромагнитного поля при индукционном возбуждении, создаваемых локальным объемом V, путем суммирования по всем элементарным объемам

$$V = \sum_{n=1}^{N} dV_n\,.$$

$$\boldsymbol{E}^{ai}(\boldsymbol{r}) = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} rot \sum_{n=1}^{N}\frac{exp(-k_0 R)}{R}\Delta k^2(\boldsymbol{r}_n)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}_n)dV_n\,,$$

$$\boldsymbol{H}^{ai}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi} rotrot \sum_{n=1}^{N}\frac{exp(-k_0 R)}{R}\Delta k^2(\boldsymbol{r}_n)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}_n)dV_n\,,$$

где $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n|$, $\boldsymbol{r}_n$ - координата центра элементарного объема dV_n.

Интегральный вид формул можно получить при предельном переходе $N \to \infty$, при условии малой величины $dV_n \to 0$. Предварительно получаем для вектора потока напряженности магнитного поля в каждой точке элементарного объема $\boldsymbol{r}_n \in dV_n$ непрерывную функцию

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}_n) = \boldsymbol{\xi}\int H_\xi dS_\xi + \boldsymbol{\eta}\int H_\eta dS_\eta + \boldsymbol{\zeta}\int H_\zeta dS_\zeta \;/\, c\,.$$

Для аномальных составляющих напряженностей поля, используя

$$\boldsymbol{E}^{ai}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\boldsymbol{dV_n}\to 0}\sum_{n=1}^{\boldsymbol{N}} d\boldsymbol{E}^{ai}(\boldsymbol{r}_n)\,, \qquad \boldsymbol{H}^{ai}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\boldsymbol{dV}\to 0}\sum_{n=1}^{\boldsymbol{N}} d\boldsymbol{H}^{ai}(\boldsymbol{r}_n)\,,$$

имеем

$$\boldsymbol{E}^{ai}(\boldsymbol{r}) = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} rot\int_V \frac{exp(-k_0 R)}{R}\Delta k^2(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}')dV \qquad (4.16)$$

или в матричном представлении

$$\boldsymbol{E}_m^{ai}(\boldsymbol{r}) = \int_V \hat{W}_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}')\Delta k^2(\boldsymbol{r}')\Phi_n(\boldsymbol{r}')dV\,,$$

а так же

$$\boldsymbol{H}^{ai}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\,rotrot\int_V \frac{exp(-k_0 R)}{R}\Delta k^2(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}')dV\,, \qquad (4.17)$$

или в матричном представлении

$$H_m^{ai}(\boldsymbol{r}) = -\int_V \hat{G}_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}')\Delta k^2(\boldsymbol{r}')\Phi_n(\boldsymbol{r}')dV\,.$$

Тензорными функциями $\hat{W}_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}')$ и $\hat{G}_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}')$ обозначены

m - компоненты электрического (для $\hat{W}$) и магнитного (для $\hat{G}$) поля, в точке

$\boldsymbol{r}$ - наблюдений, создаваемые переменным магнитным диполем с единичным моментом, ориентированным в направлении

n - оси системы координат и находящимся в точке

$\boldsymbol{r}'$ - системы координат.

Полученные формулы (4.16) и (4.17) описывают индукционные части напряженностей аномального поля, создаваемого по закону Фарадея под действием переменного магнитного поля на локальный проводящий объект.

4.4 Уравнение рассеяния гармонического электромагнитного поля на проводящем 3D объекте

Объединяя интегральные формулы для аномальных электрического (4.3) и (4.16) и магнитного (4.5) и (4.17) полей, получим для суммарного электромагнитного поля шестикомпонентную систему интегральных соотношений. Будем называть эту систему уравнением рассеяния гармонического электромагнитного поля стороннего источника на 3D объекте

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}^0 + \dfrac{1}{4\pi\sigma_0}(grad\ div - k_0^2)\displaystyle\int_V g\Delta\sigma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')dV + \frac{j\omega\mu_0}{4\pi}\,rot\int_V g\Delta k^2(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}')dV, \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}^0 + \dfrac{1}{4\pi}\,rot\displaystyle\int_V g\Delta\sigma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')dV - \frac{1}{4\pi}\,rot\,rot\int_V g\Delta k^2(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}')dV \end{cases} \qquad (4.18)$$

здесь для сокращения записи использовано обозначение (3.10) скалярной комплексной функции Грина $g = exp(-k_0 R)/R$, $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$, $\boldsymbol{r}' \in V$. Поскольку дифференциальные операторы действуют на координаты точек наблюдений $\boldsymbol{r}$ функции Грина, уравнение рассеяния можно записать в виде

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}^0 + \dfrac{1}{4\pi\sigma_0}\int\limits_V G^{EE}\Delta\sigma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')dV + \dfrac{j\omega\mu_0}{4\pi}\int\limits_V W^{EH}\Delta k^2(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}')dV, \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}^0 + \dfrac{1}{4\pi}\int\limits_V W^{HE}\Delta\sigma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')dV - \dfrac{1}{4\pi}\int\limits_V G^{HH}\Delta k^2(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}')dV \end{cases} \quad (4.19)$$

где обозначены

$$G^{EE} = (grad\ div - k_0^2)\frac{e^{-k_0 R}}{R},\ W^{EH} = W^{HE} = rot\frac{e^{-k_0 R}}{R},\ G^{HH} = rot\ rot\frac{e^{-k_0 R}}{R}.$$

Для точек $\boldsymbol{r} \notin V$ уравнения системы (4.18) представляют собой две интегральные формулы для расчета составляющих напряженностей электромагнитного поля во внешних точках вмещающей среды

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}^o(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}^{at}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}^{ai}(\boldsymbol{r}) \text{ и } \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{H}^{at}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{H}^{ai}(\boldsymbol{r}).$$

Для точек $\boldsymbol{r} \in V$ полученная система является интегральным соотношением, поскольку напряженности электромагнитного поля, создаваемые за счет индукционного возбуждения выражены через изменение потока напряженности магнитного поля.

Уравнение рассеяния гармонического электромагнитного поля (4.18) учитывает как парный, так и перекрестный эффекты физических полей.

Парный эффект полей заключается в учете действия двух сил, действующих на заряды со стороны электрического поля и со стороны переменного магнитного поля. Учет двух действующих сил отражен в виде двух слагаемых, входящих в каждое из двух уравнений системы и заключается в поляризации 3D проводника токами проводимости (первые аномальные слагаемые поля) и токами индукции (вторые аномальные слагаемые поля). Их можно называть электрическим и магнитным возбуждением локального проводника со стороны действующего электромагнитного поля.

Перекрестный эффект полей заключается в создании магнитного поля электрическим полем по закону Био-Савара (токами в проводящей среде) и электрического поля – магнитным полем по закону Фарадея (изменением потока магнитной индукции). Учет перекрестного эффекта отражен в каждом из двух уравнений системы – для электрического поля вторым аномальным слагаемым поля, для магнитного поля – первым аномальным слагаемым поля.

Анализ уравнения рассеяния гармонического электромагнитного поля

Убедимся, что система уравнений (4.18) удовлетворяет уравнениям системы Максвелла (III.1 – III.4). Для аномальных слагаемых электромагнитного поля, обусловленных токами проводимости, такая проверка выполнена в работе [Хижняк, 1986].

1. Электрическое поле – первое уравнение системы – должно удовлетворять уравнению непрерывности плотности полного тока $div\,\boldsymbol{i} = 0$ или $div(\sigma_0 + \Delta\sigma)\boldsymbol{E} = -div\,\boldsymbol{i}^c$, откуда

$$div\boldsymbol{E} = -div\boldsymbol{E}^c - div\left\{\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0}\boldsymbol{E}\right\}.$$

Определим $div\boldsymbol{E}$ первого уравнения системы. В однородной среде $\sigma = \sigma_0$ сторонний источник создает электрическое поле, называемое нормальным $div\boldsymbol{E}^0 = -div\boldsymbol{E}^c$. Поскольку операция *div* действует на координаты точек $\boldsymbol{r}$, для второго аномального слагаемого напряженности электрического поля сразу следует из векторного тождества $div\boldsymbol{E} = divrot\boldsymbol{A}^* = 0$, что $div\boldsymbol{E}^{ai} = 0$.

Для первого аномального слагаемого

$$div\boldsymbol{E}^{at} = \frac{1}{4\pi\sigma_0} div(\,grad\;div - k_0^2\,)\int\limits_V g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\Delta\sigma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')dV\,.$$

Преобразуем дифференциальные операторы к виду

$$div\,(\,grad\,div - k_0^2) = (\Delta - k_0^2)div = div(\Delta - k_0^2).$$

Поскольку для точек $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$ справедливо равенство $(\Delta - k_0^2)g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = 0$, то $div\boldsymbol{E}^{at} = 0$.

Из этой формулы следует, что аномальное электрическое поле имеет динамический (дивергентный) характер и показывает, что локальный объект не является источником электрического поля, а приводит лишь к пространственному перераспределению поля, создаваемого сторонним источником.

Для точек $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ преобразуем $\Delta g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = k_0^2 g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') - 4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$. Снимая интеграл и сокращая подобные члены, в результате имеем

$$div\boldsymbol{E}^{at} = -\frac{1}{\sigma_0} div(\Delta\sigma\boldsymbol{E}),$$

что соответствует уравнению непрерывности плотности полного тока для случая неоднородной среды

$$div\boldsymbol{E} = div\boldsymbol{E}^0 - div\left\{\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0}\boldsymbol{E}\right\}.$$

Первое уравнение системы (4.18) удовлетворяет уравнению непрерывности плотности полного тока.

2. Второе уравнение системы (4.18) в немагнитной среде должно удовлетворять уравнению непрерывности для напряженности магнитного поля $div\boldsymbol{H} = 0$.

Определим $div\boldsymbol{H}$ второго уравнения системы. Магнитное поле $\boldsymbol{H}^0$, создаваемое в однородной среде токовыми источниками в виде электрического диполя или их суперпозиции вдоль линий или замкнутых контуров, всегда можно представить с помощью вектор-потенциала электрического типа для однородной среды как $\boldsymbol{H}^0 = rot\boldsymbol{A}^0$, откуда следует $div\boldsymbol{H}^0 = 0$.

Первое аномальное слагаемое для напряженности магнитного поля $div\boldsymbol{H}^{at}(\boldsymbol{r}) = 0$, т.к. $div\boldsymbol{H} = div\ rot\boldsymbol{A} = 0$.

Для второго аномального слагаемого, выполнив преобразования, подобные предыдущим, при $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$ получим $div\boldsymbol{H}^{ai} = 0$.

При $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ используя (4.6), преобразуем при $\Delta\sigma$, $\Delta k^2 = const$ в пределах малого объема и $S = const$ (поскольку для элементарного объема при выводе момента в (4.11) – (4.13) по пространственным переменным выполнено интегрирование в конечных пределах)

$$div\boldsymbol{H} = div(\Delta k^2 \boldsymbol{\Phi}) = j\omega\mu_0 \Delta\sigma \cdot div\left(\boldsymbol{H}S\right) = -\Delta\sigma S div(rot\boldsymbol{E}) = 0$$

с учетом векторного тождества $div\ rot\ \boldsymbol{F} = 0$.

Второе уравнение системы (4.18) удовлетворяет уравнению непрерывности магнитного поля.

3. Первое уравнение системы (4.18) должно удовлетворять второму уравнению Максвелла $rot\boldsymbol{E} = -j\omega\mu_0 \boldsymbol{H}$ (закону Фарадея в дифференциальной форме). Определим $rot\boldsymbol{E}$ первого уравнения системы. Взяв операцию rot от первого аномального слагаемого электрического поля и используя

$rot\,(\,grad\ div - k_0^2\,) = -k_0^2 rot$, поскольку $rot\ grad\varphi = 0$, получаем [Хижняк, 1986]

$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi} rot \int_V g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\Delta\sigma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')dV = -j\omega\mu_0 \boldsymbol{H},$$

аналогичная операция со вторым аномальным слагаемым напряженности электрического поля дает

$$rot\boldsymbol{E} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi c} rot\ rot \int_V g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\Delta k^2(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}')dV = -j\omega\mu_0 \boldsymbol{H}.$$

Первое уравнение системы (4.18) удовлетворяет закону Фарадея в дифференциальной форме.

4. Второе уравнение системы (4.18) должно удовлетворять первому уравнению Максвелла $rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$ (закону Био-Савара в дифференциальной форме). Во втором уравнении системы первое аномальное слагаемое есть интегральная запись закона Био-Савара для объемных гармонических токов.

Более того, это слагаемое получается непосредственно из закона Био-Савара в дифференциальной форме.

Взяв операцию *rot* от первого аномального слагаемого напряженности магнитного поля в (4.18), получаем с учетом

$$\Delta g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=k_0^2 g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'):$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}' \;\; rot\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{4\pi}(\,grad\; div-k_0^2)\int\limits_V g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\Delta\sigma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')dV=\sigma_0\boldsymbol{E}=\boldsymbol{i}^0\\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}' \;\; rot\boldsymbol{H}=\sigma_0\boldsymbol{E}+\Delta\sigma\boldsymbol{E}=\boldsymbol{i}\end{cases}$$

т.е. вихрь магнитного поля, создаваемого токами в однородной или неоднородной среде.

Взяв операцию *rot* от второго аномального слагаемого напряженности магнитного поля при $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'$, с учетом $rot\; rot\; rot\boldsymbol{F}=-k_0^2 rot\boldsymbol{F}$, где $rot\; grad\varphi=0$, получим аномальную часть индукционного электрического поля, создаваемого в локальном объеме по закону Фарадея, с множителем σ_0

$$rot\boldsymbol{H}^{ai}=\frac{j\omega\mu_0\sigma_0}{4\pi c}\,rot\int\limits_V g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\Delta k^2(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}')dV=\sigma_0\boldsymbol{E}^{ai}.$$

При $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ и $rot\; rot\; rot\boldsymbol{F}=-k_0^2 rot\boldsymbol{F}+4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')rot\boldsymbol{F}$

$$rot\boldsymbol{H}^{ai}=\sigma_0\boldsymbol{E}^{ai}+rot(\Delta k^2\boldsymbol{\Phi})=\sigma_0\boldsymbol{E}^{ai}+\Delta\sigma\left(j\omega\mu_0 rot\boldsymbol{\Phi}\right).$$

Множитель, стоящий в скобках последнего слагаемого, соответствует напряженности аномального электрического поля при магнитном возбуждении $\boldsymbol{E}^{ai}$, но лишь формально, поскольку явного выражения для него не существует.

Из последней формулы видно, что напряженность аномального электрического поля при магнитном возбуждении пропорциональна изменению во времени вихря потока магнитной индукции, пересекающей площадку, ограниченную элементарным контуром

$$\boldsymbol{E}^{ai} \sim \frac{\partial}{\partial t} \cdot rot\left(\boldsymbol{B}S\boldsymbol{n}\right).$$

Для проверки второго аномального слагаемого системы (4.18) для напряженности магнитного поля воспользуемся интегральной формой первого уравнения Максвелла. Из вывода формулы (4.14) для точек $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ сразу получим

$$\oint_L H_l^{ai} dl \cdot (S\boldsymbol{n}) = I^{ai} S\boldsymbol{n} = -\Delta k^2 \boldsymbol{\Phi} dV \,.$$

Выполненная проверка показывает, что уравнение рассеяния (4.18) удовлетворяет всем уравнениям системы Максвелла. Это означает так же автоматическое выполнение граничных условий для напряженностей полей, поскольку последние получают из уравнений непрерывности III.3 и III.4 системы уравнений Максвелла в интегральном виде.

4.5 Частные случаи уравнения рассеяния. Стационарный режим поля. Рассеяние поля на 3D объекте в непроводящей среде

В случае стационарного режима источника поля $\omega = 0$ в системе (4.18) отсутствуют вторые аномальные слагаемые поля, соответствующие возбуждению 3D объекта токами индукции. Система (4.18) распадается для точек $\boldsymbol{r} \notin V$ на две интегральные формулы для расчета напряженностей электрического и магнитного поля, соответствующих формулам (1.8) и (1.9). Для точек $\boldsymbol{r} \in V$ уравнение (1.8) является трехкомпонентной системой объемных векторных интегральных уравнений для напряженности электрического поля стационарного стороннего источника в неоднородной среде [Дмитриев, 1973; Кормильцев, 2000 и др.].

В случае непроводящей среды $\sigma_0 = 0$ в системе (4.18) отсутствуют первые аномальные слагаемые поля, соответствующие возбуждению проводящего 3D объекта токами проводимости. В последних слагаемых, поскольку в непроводящей среде отсутствует волновое затухание поля, скалярная функция Грина (4.18) имеет вид $g = 1/R$. Система (4.18) распадается для точек

$\boldsymbol{r} \notin V$ на две интегральные формулы для расчета напряженностей электрического и магнитного поля:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r}) + \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} rot \int_V k^2(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}')}{R} dV , \tag{4.20}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{4\pi} rot\ rot \int_V k^2(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}')}{R} dV . \tag{4.21}$$

Для точек $\boldsymbol{r} \in V$ уравнение (4.20) является системой интегральных соотношений для напряженности магнитного поля, описывающее возбуждение проводящего 3D тела переменным магнитным полем.

Последнее уравнение имеет особое значение в изучении рассеяния гармонического электромагнитного поля на проводящем локальном объекте, находящемся в непроводящей среде, поскольку дает возможность сопоставить материалы экспериментальных физических измерений с теоретическими расчетами рассеяния поля. Собственно именно необходимость этого сопоставления и являлась причиной проведенных выше теоретических выкладок.

Заключение.

Рассеяние гармонического электромагнитного поля стороннего источника на проводящем 3D объекте описывается шестикомпонентной системой уравнений для напряженностей электрического и магнитного поля.

Уравнение рассеяния гармонического электромагнитного поля учитывает парный и перекрестный эффекты физических полей:

- парный эффект полей заключается в учете действия двух сил, действующих на заряды со стороны электрического и переменного магнитного полей;
- перекрестный эффект полей заключается в создании магнитного поля электрическим полем (токами) по закону Био-Савара и электрического поля – переменным магнитным полем по закону Фарадея.

Г л а в а 5.

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ РАССЕЯНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА 3D ОБЪЕКТЕ

Численная реализация уравнения рассеяния гармонического электромагнитного поля (4.19), как и частные случаи стационарного электрического поля (1.8) и рассеяния гармонического электромагнитного поля на 3D объекте в непроводящей среде (4.20), основываются на обобщении метода решения одномерного скалярного интегрального уравнения, предложенного самим Фредгольмом [Крылов, 1984]. В трехмерном случае для векторного поля она заключается в замене непрерывного интеграла по объему (или по нескольким объемам) суммой по конечному числу элементов объема $N \to \infty$ столь малых $dV_P \to 0$, что электропроводность и напряженности поля можно считать постоянными величинами в пределах каждого из них $\sigma(\boldsymbol{r}_P) = Const$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_P) = Const$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_P) = Const$.

5.1 Сведение уравнения рассеяния к системе линейных алгебраических уравнений

Приведем систему интегральных соотношений (4.18) к системе линейных алгебраических уравнений. Перегруппируем слагаемые системы и запишем уравнение рассеяния (4.19) в матричном виде с симметричными дифференциальными операторами, используя соотношение векторного анализа $rotrot\boldsymbol{F} = graddiv\boldsymbol{F} - \Delta\boldsymbol{F}$ и волновое уравнение для скалярной функции Грина (3.10), из которого следует, что

$$\Delta g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = k_0^2 g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') - 4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}').$$

Это дает дополнительное слагаемое ко второму уравнению, равное $\Delta k^2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})/c$, откуда

$$\begin{cases} E_m - \dfrac{1}{4\pi\sigma_0}\int\limits_V \Delta\sigma G_{mn}E_n dV - \dfrac{j\omega\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \Delta k^2\ W_{mn}\Phi_n dV = E_m^0 \\ -\dfrac{1}{4\pi}\int\limits_V \Delta\sigma W_{mn}E_n dV + H_m + \Delta k^2\Phi_m + \dfrac{1}{4\pi}\int\limits_V \Delta k^2 G_{mn}\Phi_n dV = H_m^0 \end{cases} \qquad (5.1)$$

где тензорными функциями обозначены (индексы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ для сокращения записи опущены)

$$G_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}') = \left\{\frac{\partial^2}{\partial r_m \partial r_n} - k_0^2\delta_{mn}\right\}\frac{exp(-k_0R)}{R},\ W_{mn}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}') = \delta_{m\ell n}\frac{\partial}{\partial r_\ell}\frac{exp(-k_0R)}{R}.$$

Внесем векторы напряженностей поля под знаки интегралов, используя свойство дельта–функции Дирака

$$F(\boldsymbol{r}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$

и представим напряженности электрического и магнитного поля в качестве общих множителей, используя символ Кронекера δ_{mn}. Получим

$$\begin{cases} \int\limits_V \left[\delta_{mn}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \dfrac{\Delta\sigma}{4\pi\sigma_o}G_{mn}\right]E_n dV - \dfrac{j\omega\mu_o}{4\pi}\int\limits_V \Delta k^2\ W_{mn}\Phi_n dV = E_m^0 \\ -\int\limits_V \dfrac{\Delta\sigma}{4\pi}W_{mn}E_n dV + \int\limits_V \left\{\delta_{mn}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')H_n + \left[\delta_{mn}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \dfrac{1}{4\pi}G_{mn}\right]\Delta k^2\Phi_n\right\}dV = H_m^0 \end{cases} \qquad (5.2)$$

Заменим интегралы суммами по большому, но конечному числу элементов объема $N\to\infty$, при этом интегрирование по объему каждого малого элемента перенесем на дельта–функцию Дирака и тензорные функции Грина

$$\int\limits_{V_P}\delta(\boldsymbol{r}_p-\boldsymbol{r}_g)d\boldsymbol{r}_p = \delta_{gp},\ \hat{G}_{mn} = \int\limits_{V_p} G_{mn}(\boldsymbol{r}_g/\boldsymbol{r}_p)dV_p \text{ и } \hat{W}_{mn} = \int\limits_{V_p} W_{mn}(\boldsymbol{r}_g/\boldsymbol{r}_p)dV_p,$$

где δ_{gp} – символ Кронекера, точки $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ определяют центры элементарных объемов $\boldsymbol{r}_g$, $\boldsymbol{r}_p$ и для сокращения записи обозначены индексами $g, p = 1,\ldots, N$.

Для текущей точки $\boldsymbol{r}_g$ имеем

$$\begin{cases} \sum\limits_{p=1}^{N}\sum\limits_{n=1}^{3}\left[\delta_{mn}\delta_{gp}-\dfrac{\Delta\sigma(\boldsymbol{r}_p)}{4\pi\sigma_o}\hat{G}_{mn}\right]E_n(\boldsymbol{r}_p)- \\ -\dfrac{j\omega\mu_o}{4\pi c}\sum\limits_{p=1}^{N}\sum\limits_{n=1}^{3}\Delta k^2(\boldsymbol{r}_p)\hat{W}_{mn}H_n(\boldsymbol{r}_p)S(\boldsymbol{r}_p)=E_m^0(\boldsymbol{r}_g) \\ -\sum\limits_{p=1}^{N}\sum\limits_{n=1}^{3}\dfrac{\Delta\sigma(\boldsymbol{r}_p)}{4\pi}\hat{W}_{mn}E_n(\boldsymbol{r}_p)+ \\ +\sum\limits_{p=1}^{N}\sum\limits_{n=1}^{3}\left\{\delta_{mn}\delta_{gp}+\left[\delta_{mn}\delta_{gp}+\dfrac{1}{4\pi}\hat{G}_{mn}\right]\dfrac{\Delta k^2(\boldsymbol{r}_p)}{c}S(\boldsymbol{r}_p)\right\}H_n(\boldsymbol{r}_p)=H_m^0(\boldsymbol{r}_g) \end{cases}$$

где раскрыто определение вектора $\boldsymbol{\Phi}$, введенного в формуле (4.14).

Введем шестикомпонентные полевые векторы поля $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{B}$:

$\boldsymbol{B}_i=[E_1^0,E_2^0,E_3^0,H_1^0,H_2^0,H_3^0]$; $\boldsymbol{X}_j=[E_1,E_2,E_3,H_1,H_2,H_3]$; i,j = 1,2,…6

и объединим суммы. Рассматривая A_{ij} как элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ размером $N*N$, а $\boldsymbol{X}_j$ и $\boldsymbol{B}_i$ как N – мерные векторы, получим матричное представление уравнения

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{Bmatrix}, \qquad (5.3)$$

т.е. СЛАУ вида $[\boldsymbol{A}]\cdot[\boldsymbol{X}]=[\boldsymbol{B}]$, где $[\boldsymbol{A}]$ – матрица размером $N*N$, $[\boldsymbol{X}]$ и $[\boldsymbol{B}]$ – векторы неизвестных и свободных членов размером N. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}. \qquad (5.4)$$

Здесь вектор–столбцы $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{B}$ имеют размерность $6\cdot N$, а клеточная матрица Грина А с четырьмя клетками имеет размерность $6N*6N$ с элементами

$$A_{ij}(\boldsymbol{r}_g / \boldsymbol{r}_p)=\left[\begin{array}{c|c} \delta_{mn}\delta_{gp}\phi(\boldsymbol{r}_p)-\dfrac{\Delta\sigma(\boldsymbol{r}_p)}{4\pi\sigma_o}\hat{G}_{mn} & -\dfrac{j\omega\mu_o}{4\pi}\dfrac{\Delta k^2(\boldsymbol{r}_p)V(\boldsymbol{r}_p)}{cd_n(\boldsymbol{r}_p)}\hat{W}_{mn} \\ \hline -\dfrac{\Delta\sigma(\boldsymbol{r}_p)}{4\pi}\hat{W}_{mn} & \delta_{mn}\delta_{gp}\psi(\boldsymbol{r}_p)+\dfrac{\Delta k^2(\boldsymbol{r}_p)V(\boldsymbol{r}_p)}{4\pi cd_n(\boldsymbol{r}_p)}\hat{G}_{mn} \end{array}\right], \quad (5.5)$$

m, n = 1,2,3; $V(\boldsymbol{r}_p)$, $d_n(\boldsymbol{r}_p)$ - объем элемента $\boldsymbol{r}_p$ и его размер по оси n.

Диагональные элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ для точек $\boldsymbol{r}_p = \boldsymbol{r}_g$ равны 0 при $i \neq j$, а при $i = j$ выделены в виде отдельных слагаемых $\varphi(\boldsymbol{r}_p)$ и $\psi(\boldsymbol{r}_p)$ в двух диагональных блоках матрицы $\boldsymbol{A}$. Недиагональные элементы матрицы $\boldsymbol{r}_p \neq \boldsymbol{r}_g$ отличны от нуля. Слагаемые $\varphi(\boldsymbol{r}_p)$ и $\psi(\boldsymbol{r}_p)$ в главной диагонали матрицы соответствуют особенностям тензорной функции $\hat{G}_{mn}(\boldsymbol{r}_g / \boldsymbol{r}_p)$ в точках $\boldsymbol{r}_p = \boldsymbol{r}_g$ при $m = n$. Элементы тензорной функции $\hat{W}_{mn}(\boldsymbol{r}_g / \boldsymbol{r}_p)$ в точках $\boldsymbol{r}_p = \boldsymbol{r}_g$ при $m = n$ особенностей не имеют в силу симметрии.

Дополнительным, но важным параметром при разбиении 3D тела на элементарные объемы является условие квазистационарного приближения, что означает, что размер тела не превышает длину электромагнитной волны λ

$$\lambda = 2\pi / \mathrm{Re}(k) = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}.$$

Замена объемного интеграла суммой элементов позволяет применить это условие к характерному линейному размеру элементарного объема прямоугольного параллелепипеда (например, максимальной длине ребра или его главной диагонали), т.е. должно соблюдаться условие $d < \lambda$, что приводит к условию дискретизации элементов объема $d < 9 \cdot (\omega\mu_0\sigma)^{-1/2}$.

Условие квазистационарности поля $Re(k) \cdot d << 1$ позволяет сделать еще одно допущение, которое заключается в том, что в пределах элементарного объема можно пренебрегать изменением фазы, а именно – положить, что

$$exp\ -k_0 R\ \approx exp\ -k_0\ R \pm d/2\ \ ,$$

где R – расстояние между центрами элементарных объемов. В этом случае интеграл от тензорной функции Грина для элементарного объема в виде прямоугольного параллелепипеда для диагональных элементов $\hat{G}_{mn}$ при $\boldsymbol{r}_p = \boldsymbol{r}_g$ можно взять аналитически.

Для составляющих $m = n$, выполняя интегрирование, получим

$$\hat{G}_{mm} = \int_{V_p} \frac{\partial^2}{\partial r_m^2} \frac{1}{R} dV_p = -8 \cdot arctg\left(\frac{V(\boldsymbol{r}_p)}{D(\boldsymbol{r}_p) \cdot d_m^2(\boldsymbol{r}_p)} \right), \qquad (5.6)$$

$V(\boldsymbol{r}_p) = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$ – объем элемента, $d_m(\boldsymbol{r}_p)$ – длина элемента по оси m, $D(\boldsymbol{r}_p) = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$ – длина диагонали элемента объема. Для элемента объема в виде куба имеем $\hat{G}_{mm} = -4\pi/3$.

В результате коэффициенты в матрице Грина $\boldsymbol{A}$ (5.5) примут вид

$$\varphi(\boldsymbol{r}_p) = 1 + \frac{\Delta\sigma(\boldsymbol{r}_p)}{3\sigma_o} = \frac{\sigma(\boldsymbol{r}_p) + 2\sigma_o}{3\sigma_o},\ \psi(\boldsymbol{r}_p) = 1 + 2\Delta k^2(\boldsymbol{r}_p) d^2(\boldsymbol{r}_p)/3c. \quad (5.7)$$

Рассмотрим два частных случая уравнения рассеяния. Первым является стационарный режим источника поля (1.8), вторым - рассеяние гармонического электромагнитного поля на 3D объекте в непроводящей среде, описываемый формулами (4.19) и (4.20). Для стационарного поля СЛАУ вида (5.4) с первым коэффициентом из (5.7) имеет размерность $3N$*$3N$, а вещественная матрица $\boldsymbol{A}$ имеет вид [Кормильцев, 2000]

$$A_{mn}(\boldsymbol{r}_g / \boldsymbol{r}_p) = \left[\delta_{mn} \delta_{\boldsymbol{r}_g \boldsymbol{r}_p} \varphi(\boldsymbol{r}_p) - \frac{\Delta\sigma(\boldsymbol{r}_p)}{4\pi\sigma_o} \hat{G}_{mn}(\boldsymbol{r}_g / \boldsymbol{r}_p) \right], \qquad (5.8)$$

векторы поля $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{B}_m = [E_1^0, E_2^0, E_3^0]$ - электрическое поле стороннего источника в однородной среде; $\boldsymbol{X}_n = [E_1, E_2, E_3]$; $m, n = 1,2,3$.

Вторым частным случаем является рассеяние гармонического поля стороннего источника на 3D объекте в непроводящей среде. Для этого случая

комплексная матрица $\boldsymbol{A}$ размерность $3N*3N$ записывается как

$$A_{mn}(\boldsymbol{r}_g / \boldsymbol{r}_p)=\left[\delta_{mn}\delta_{\boldsymbol{r}_g\boldsymbol{r}_p}\psi(\boldsymbol{r}_p)+\frac{k^2(\boldsymbol{r}_p)V(\boldsymbol{r}_p)}{4\pi c d_n(\boldsymbol{r}_p)}\hat{G}_{mn}(\boldsymbol{r}_g / \boldsymbol{r}_p)\right], \tag{5.9}$$

с векторами поля $\boldsymbol{B}_m = [H_1^0, H_2^0, H_3^0]$ - магнитное поле стороннего источника в однородной среде; $\boldsymbol{X}_n = [H_1, H_2, H_3]$; $m, n = 1,2,3$.

5.2 Регуляризация уравнения рассеяния электромагнитного поля

Для представления уравнения рассеяния (4.18) в регуляризованном виде значения интегралов в точках $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ выделим в виде отдельных слагаемых

$$\begin{cases} E_m = E_m^o - \dfrac{\Delta\sigma}{3\sigma_o}E_m + \dfrac{1}{4\pi\sigma_o}P\int\limits_V \Delta\sigma G_{mn}E_n dV + \dfrac{j\omega\mu_o}{4\pi}\int\limits_V \Delta k^2 W_{mn}\Phi_n dV, \\ H_m = H_m^o + 2\Delta k^2\Phi_m / 3 + \dfrac{1}{4\pi}\int\limits_V \Delta\sigma W_{mn}E_n dV - \dfrac{1}{4\pi}P\int\limits_V \Delta k^2 G_{mn}\Phi_n dV, \end{cases}$$

и перенесем их в левую часть. Здесь символ P означает главное значение интегралов, индексы точек $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ опущены для сокращения записи. Сгруппировав общие множители, получим

$$\begin{cases} E_m \cdot \phi = E_m^o + \dfrac{1}{4\pi\sigma_o}P\int\limits_V \Delta\sigma G_{mn}E_n dV + \dfrac{j\omega\mu_o}{4\pi}\int\limits_V \Delta k^2 W_{mn}\Phi_n dV, \\ H_m \cdot \psi = H_m^o + \dfrac{1}{4\pi}\int\limits_V \Delta\sigma W_{mn}E_n dV - \dfrac{1}{4\pi}P\int\limits_V \Delta k^2 G_{mn}\Phi_n dV. \end{cases}$$

Введем новые векторы $F_m(\boldsymbol{r}) = E_m(\boldsymbol{r})\cdot\varphi(\boldsymbol{r})$ и $T_m(\boldsymbol{r}) = H_m(\boldsymbol{r})\cdot\psi(\boldsymbol{r})$.

В дискретном и регуляризованном виде, используемом при численном решении методом итераций, уравнение рассеяния (4.18) имеет матричный вид

$$\begin{cases} F_m(r_g) = E_m^o(r_g) + \sum\limits_{p=1}^{N}\left[\dfrac{\Delta\sigma(r_p)}{4\pi\sigma_o\varphi(r_p)}\hat{G}_{mn}F_n(r_p) + j\omega\mu_o\dfrac{\Delta k^2(r_p)}{4\pi c\psi(r_p)}\hat{W}_{mn}T_n(r_p)S(r_p)\right], \\ T_m(r_g) = H_m^o(r_g) + \sum\limits_{p=1}^{N}\left[\dfrac{\Delta\sigma(r_p)}{4\pi\varphi(r_p)}\hat{W}_{mn}F_n(r_p) - \dfrac{\Delta k^2(r_p)}{4\pi c\psi(r_p)}\hat{G}_{mn}T_n(r_p)S(r_p)\right]. \end{cases} \tag{5.10}$$

Проблема дискретизации локального объема

Структура распределения переменного электромагнитного поля внутри проводящего тела существенно зависит не только от его электропроводности, но и от частоты тока, что проявляется в образовании скин-слоя вблизи поверхности. С увеличением частоты вне скин-слоя поле внутри проводника будет практически отсутствовать.

Этот вывод налагает существенные требования на дискретизацию локального объёма при математическом моделировании задач электродинамики. Система разбиения тела на элементы должна учитывать толщину скин-слоя, выражаемую из определения длины электромагнитной волны как [Матвеев, 1983]

$$\delta = \left(\frac{2}{\omega \mu_o \sigma} \right)^{1/2} \approx \frac{500}{\sqrt{f\sigma}},$$

которая характеризует глубину проникновения электромагнитных волн в среде вследствие поглощения.

Приведём некоторые системы дискретного разбиения локального объекта, для применения при расчётах электромагнитных полей (рис. 6–10).

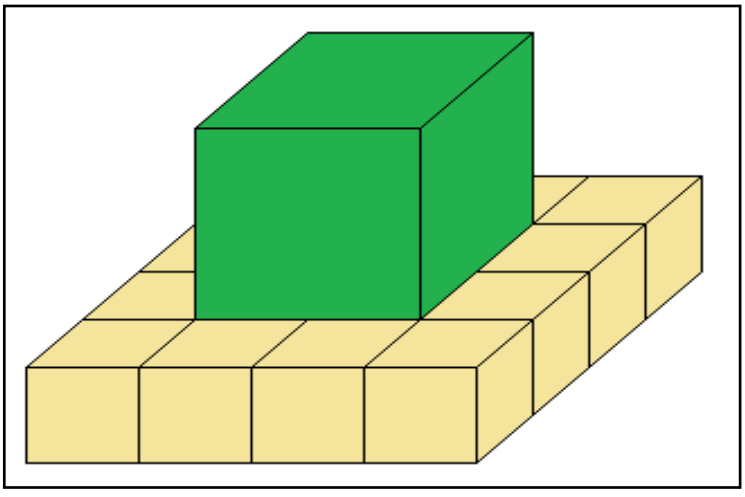


Рис. 6. Система дискретного разбиения локального объекта № 1.

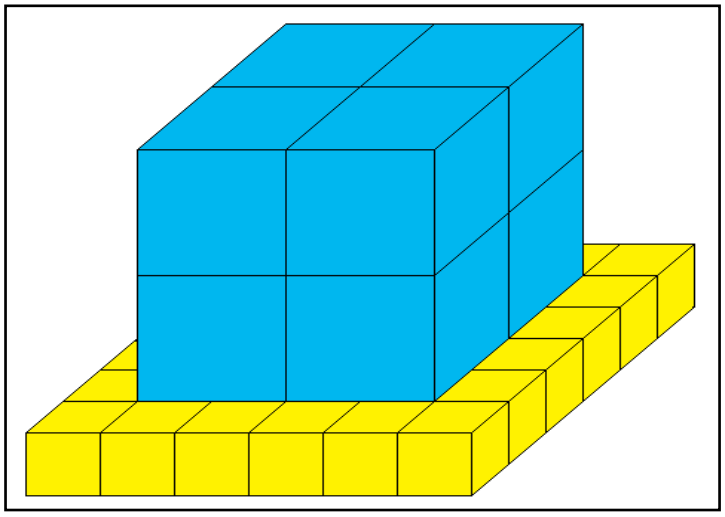


Рис. 7. Система дискретного разбиения локального объекта № 2.

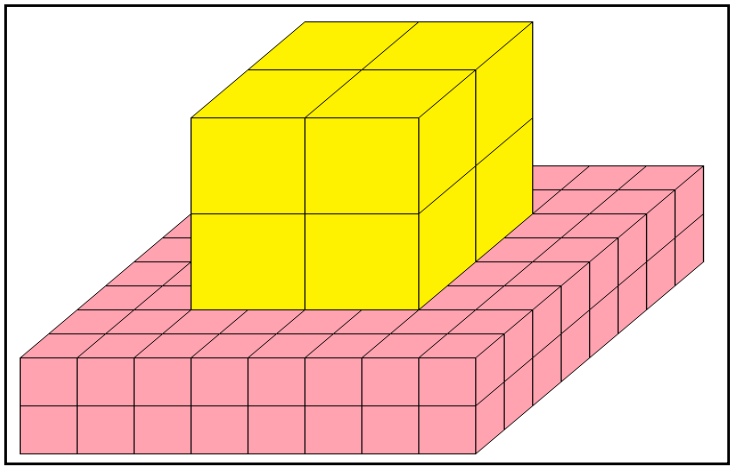


Рис. 8. Система дискретного разбиения локального объекта № 3.

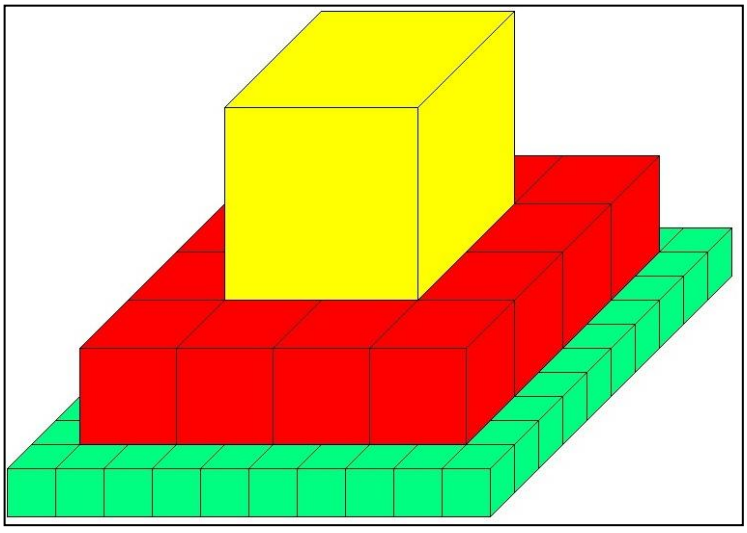


Рис. 9. Система дискретного разбиения локального объекта № 4.

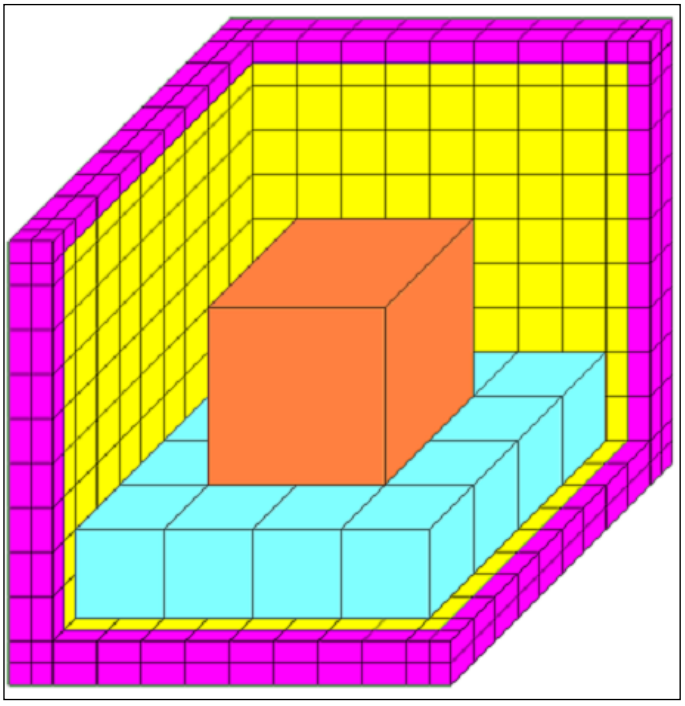


Рис. 10. Система дискретного разбиения локального объекта № 5.

На рисунках 6 – 10 представлены фрагменты строения локальных объектов, отражающие его внутреннюю структуру. Все представленные системы разбиений характеризуются следующими параметрами: каждый элементарный объём имеет единичные размеры по каждой оси; размеры элементов по осям и координаты центров элементов фиксированы; фактические размеры элементов и центров получаются простым умножением на соответствующие размеры локального объекта.

Характеристики каждой из систем.

Система № 1. Число элементарных объёмов – 57; центральный элемент имеет размеры по осям – половина стороны по каждой из осей; наружный слой разбит на 56 элементарных объёмов со сторонами, равными 1/4 величины стороны исходного объекта по каждой из осей соответственно.

Система № 2. Число элементарных объёмов – 160; 4 центральных элемента имеют размеры по осям – 1/3 стороны исходного объекта по каждой из осей соответственно; наружный слой разбит на 156 элементарных объёмов со сторонами, равными 1/6 величины стороны исходного объекта по каждой из

осей соответственно.

Система № 3. Число элементарных объёмов – 456; 4 центральных элемента имеют размеры по осям – 1/4 стороны исходного объекта по каждой из осей соответственно; наружный слой разбит на 452 элементарных объёма со сторонами, равными 1/8 величины стороны исходного объекта по каждой из осей соответственно.

Система № 4. Число элементарных объёмов – 545; 1 центральный элемент имеет размеры по осям – 1/3 стороны исходного объекта по каждой из осей соответственно; промежуточный слой разбит на 64 элементарных объёма со сторонами, равными 1/5 величины стороны исходного объекта по каждой из осей соответственно; наружный слой разбит на 480 элементарных объёмов со сторонами, равными 1/10 величины стороны исходного объекта по каждой из осей соответственно.

Система № 5. Число элементарных объёмов – 1273; 1 центральный элемент имеет размеры по осям – 1/3 стороны исходного объекта по каждой из осей соответственно; промежуточный слой разбит на 64 элементарных объёма со сторонами, равными 1/5 величины стороны исходного объекта по каждой из осей соответственно. Наружный слой, в отличие от системы №4, представляет собой “двойной” слой. В каждом угле находятся по 8 элементов с размерами сторон 1/20 величины стороны исходного объекта по каждой из осей соответственно. Рёбра представляют собой параллелепипеды со сторонами 1/10*1/20*1/20 (для ребра, расположенного вдоль оси X) либо 1/20*1/10*1/20 (для ребра, расположенного вдоль оси Y), либо 1/20*1/20*1/10 (для ребра, расположенного вдоль оси Z) величины стороны исходного объекта. Боковые элементы представляют собой параллелепипеды со сторонами 1/10*1/10*1/20 (расположены сверху и снизу от центра) либо 1/20*1/10*1/10 (расположены слева и справа от центра), либо 1/10*1/20*1/10 (расположены ближе и дальше от центра) величины стороны исходного объекта.

При проведении математического моделирования после ввода исходных

данных, в числе исходных параметров указывается параметр разбиения, соответствующий системам разбиения от 1 до 5.

При расчетах поля необходим предварительный анализ исходных данных по проводимости локального объекта для заданной частоты по определению толщины скин-слоя и выдаче рекомендации для выбора системы разбиения.

Созданные пять систем дискретного разбиения локального объекта на элементарные объёмы преследуют цель более точного учета влияния частоты и удельной электропроводности при образовании скин-слоя вблизи поверхности проводящего тела. Разработанные системы введены в программу ввода исходных данных в составе пакета, предназначенного для проведения математического моделирования задач изучения рассеяния гармонического электромагнитного поля на локальных проводящих объектах.

5.3 Методы решения СЛАУ

Для численного решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида (5.4) разработано большое количество методов [Бахвалов, 1987; Воеводин, 1977; Ильин, 1974; Фаддеев, 1963; Форсайт, 1980], каждый из которых обладает определенными достоинствами и недостатками, и выбор наилучшего метода определяется минимальными затратами времени и ресурсов применяемой ЭВМ при условии достижения требуемой точности расчетов. Из чаще всего применяемых методов итераций Зейделя и исключения Гаусса метод итераций имеет медленную скорость сходимости при большой контрастности удельной электропроводности среды и 3D объема. В свою очередь метод исключения Гаусса имеет ограничения, определяемые ресурсами ЭВМ по оперативной памяти, из-за большой размерности матрицы СЛАУ.

Метод итераций позволяет решать системы с размерностью большей, чем метод исключения Гаусса, за счет повторного вычисления строк матрицы и удобен для решения систем уравнений с соотношениями удельных

электропроводностей объема и среды < 10. При более высоких значениях этого соотношения итерационный процесс становится медленно сходящимся и требует значительного расчетного времени. Еще одним параметром, существенно ограничивающем применение метода итераций, является частота электромагнитного поля. Это объясняется тем, что с повышением частоты изменения поля в структуре токовых линий внутри тела значительную часть начинают приобретать индукционная часть токов, имеющая более сложный вид, существенно отличающийся от вида внешнего возбуждающего поля.

Метод исключения Гаусса, являясь прямым методом решения СЛАУ, имеет ошибки в решении системы за счет накопления погрешности при прямом и обратном ходе решения, а также чувствителен к выбору главных элементов матрицы. Формирование СЛАУ вида (5.7) с диагональными элементами матрицы в виде скаляров позволяет не проводить выбор ведущего элемента. В этом проявляется зависимость уменьшения влияния поля соседних элементов на рассчитываемый, по мере их удаления. Максимальное влияние каждый элемент оказывает сам на себя, что и учитывается явным выделением диагональных элементов матрицы.

Промежуточное место между методами итераций и методом исключения Гаусса имеет проекционный метод LSQR, представляющий собой модернизацию метода QR-разложения Пейджа – Саундерса [Paige, 1982]. Метод LSQR является вариантом метода сопряженных градиентов. В нем при построении решения системы $A \cdot X = B$ используется ортогональный базис, при построении которого применяется схема трехдиагонализации матрицы A методом Ланцоша. Поскольку он использует сопряженные градиенты, векторы остатков после каждой итерации взаимно ортогональны. Метод LSQR ищет наименьшее из возможных решений X, которое минимизирует $| A \cdot X - B |$. Так как при ортогональном разложении используются строки и столбцы матрицы СЛАУ, метод позволяет решать системы с размерностью, бо́льшей, чем метод исключения Гаусса, за счет хранения матрицы в ПЗУ ЭВМ. Опыт применения алгоритма LSQR при решении СЛАУ показал, что он может быть с

успехом применен в случаях, когда привлечение метода исключения Гаусса невозможно, ввиду ограничений ресурсов ЭВМ, а метод итераций не обеспечивает скорость сходимости.

Каждый метод решения СЛАУ может внести свою ошибку в решение, которое мы желаем получить. Просто применяя алгоритмы LSQR, Гаусса или итераций для решения системы уравнений мы не будем уверены в точности полученного результата. Поэтому использовалась проверка результата несколькими методами. Как показал опыт моделирования, в результате дискретизации векторного интегрального уравнения всегда получалась хорошо обусловленная система линейных алгебраических уравнений, удовлетворительно разрешимая даже при большой размерности системы. В этом находит свое частное выражение принцип корректности прямой задачи. При контрастности свойств локального объекта и вмещающей среды не более 10 на низких частотах, когда итерационный процесс завершается при ограниченном числе шагов, есть возможность широкого сопоставления решения СЛАУ методами итераций, исключения Гаусса и LSQR. Относительные различия в значениях как внешнего, так и внутреннего полей моделей при этом всегда близки к величине заданной относительной погрешности метода итераций.

Г л а в а 6.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В СРЕДЕ С 3D ОБЪЕКТАМИ

В научной литературе имеются многочисленные примеры расчетов переменного поля, когда 3D тело находится в проводящей среде в низкочастотном электрическом поле стороннего гармонического источника. Сравнительным характеристикам различных способов численной реализации посвящен международный проект COMMEMI [Жданов, 1990], в котором помимо дифференциальных методов численного моделирования реализовано векторное объемное интегральное уравнение для электрического поля гармонического стороннего источника и 3D проводящего тела в проводящем полупространстве и в слоисто-неоднородной среде.

В этой главе будут рассмотрены результаты математического моделирования рассеяния гармонического электромагнитного поля различных типов сторонних источников на проводящем 3D объекте. Выполненные исследования преследовали цель изучения основных физических закономерностей перераспределения поля внутри и вне проводящих 3D тел при раздельном и совместном возбуждении электрическим и переменным магнитным полем.

6.1 Рассеяние электромагнитного поля на 3D объекте в однородной среде

Модель 1. Рассмотрим расчет переменного поля, когда 3D проводящее однородное тело находится в проводящей среде в однородном низкочастотном внешнем электрическом поле. На рис.11 приведена геометрия модели 3D проводящего тела в форме прямоугольного параллелепипеда, вытянутого в направлении оси Y. Однородное внешнее электрическое поле имеет одну составляющую E_y^o.

Параметры расчетов модели: E_y^o = 1 (В/м), $\sigma_o = 10^{-3}$ (См/м), $\sigma_V = 10^{-2}$ (См/м), размеры 3D тела по осям составляют 50x100x50 (м).

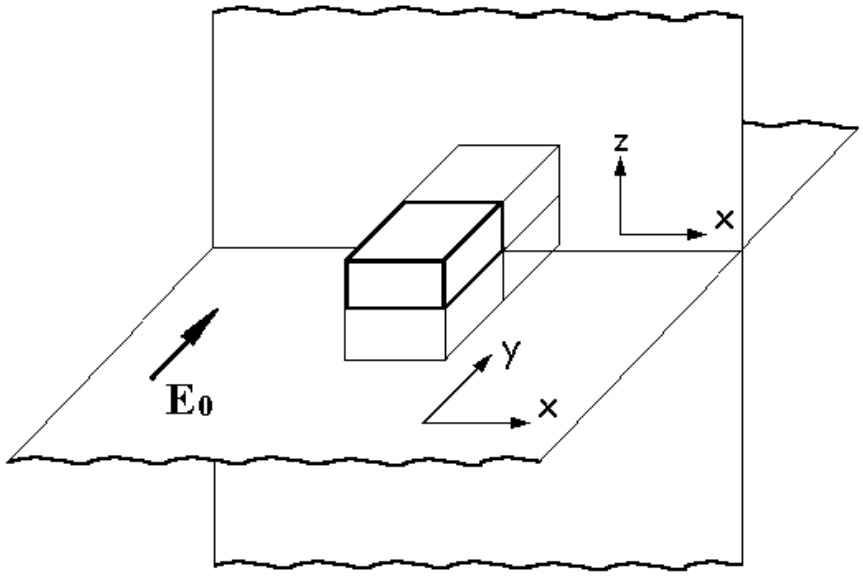


Рис. 11. Геометрия модели 3D проводящего тела, вытянутого в направлении однородного внешнего переменного электрического поля E_y^o

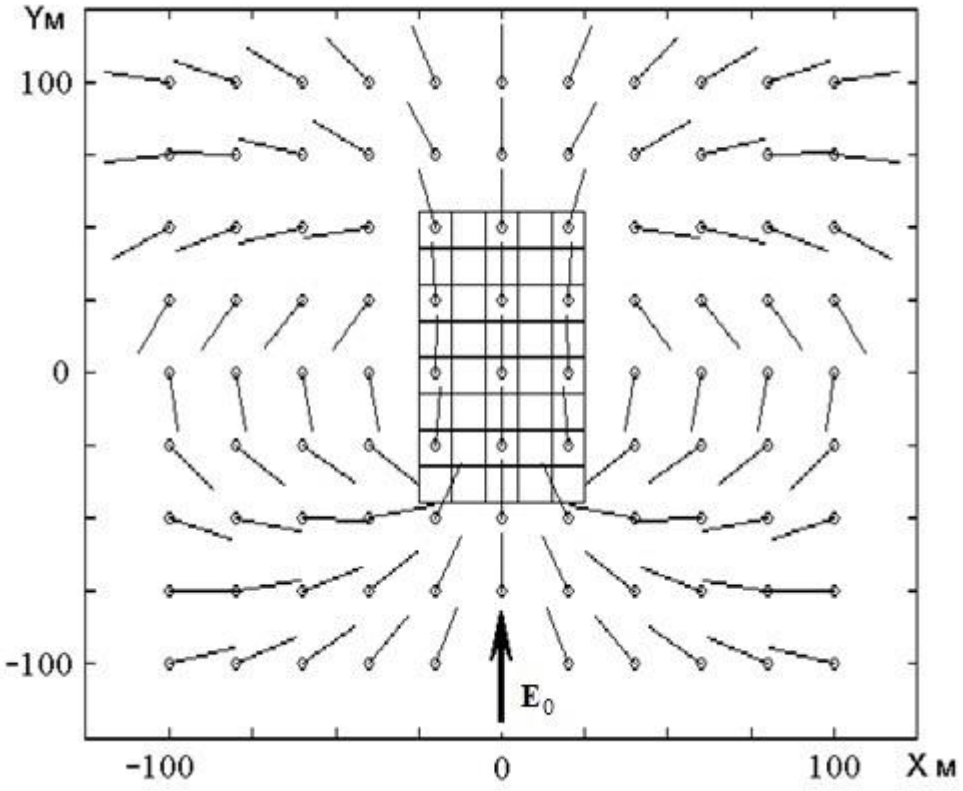


Рис. 12. План векторов *Re* компонентов аномального электрического поля в плоскости XOY, вдоль направления внешнего электрического поля E_y^o

На рис.12 приведен план векторов *Re* компонентов аномального элек-

трического поля в плоскости XOY, вдоль направления поля, показывающий распределение поля, возникающего внутри и вне однородного тела. Как видно из рис.12, распределение аномального поля эквивалентно электрическому полю вторичного электрического диполя, возникающего в центре 3D тела с моментом, ориентированным вдоль внешнего поля.

На рис. 13 приведен план векторов *Re* компонентов аномального магнитного поля в плоскости XOZ, поперек направления внешнего электрического поля E_y^o, показывающий распределение поля, возникающего внутри и вне однородного тела.

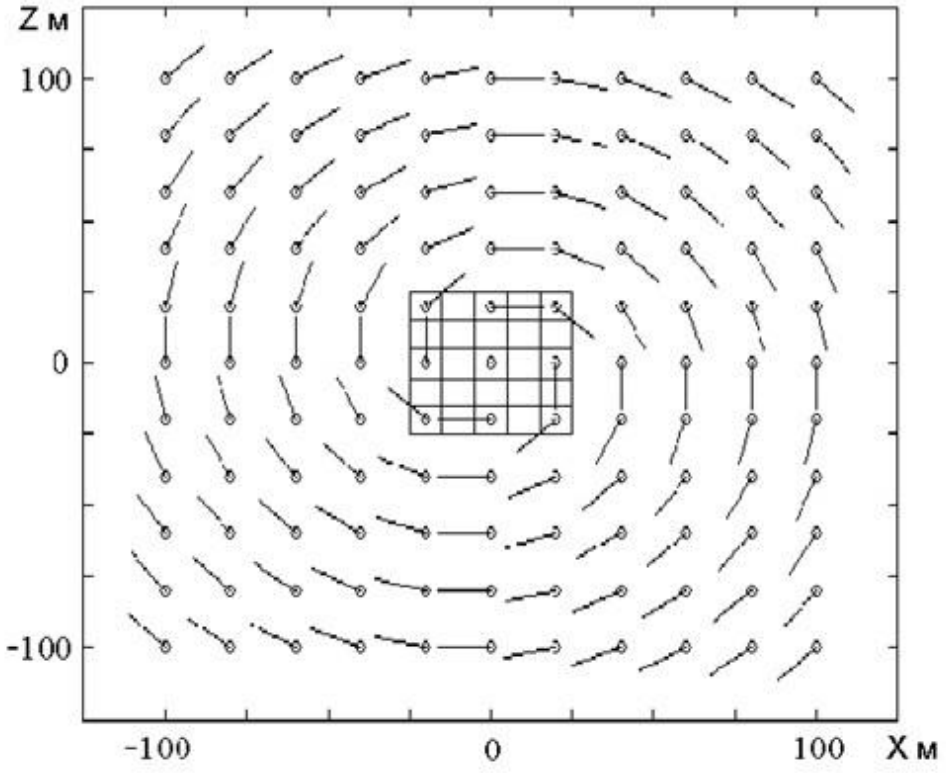


Рис. 13. План векторов *Re* компонентов аномального магнитного поля в плоскости XOZ, поперечной направлению электрического поля E_y^o

Аналогия с полем вторичного электрического диполя наблюдается и в распределении магнитного поля. Оно соответствует направлению магнитного поля вторичного электрического диполя, возникающего в центре 3D тела с моментом, ориентированным вдоль направления внешнего поля. Распределение векторов *Im* компонентов как электрического, так и магнитного поля имеют обратный знак и вектора имеют направление, встречное падающему.

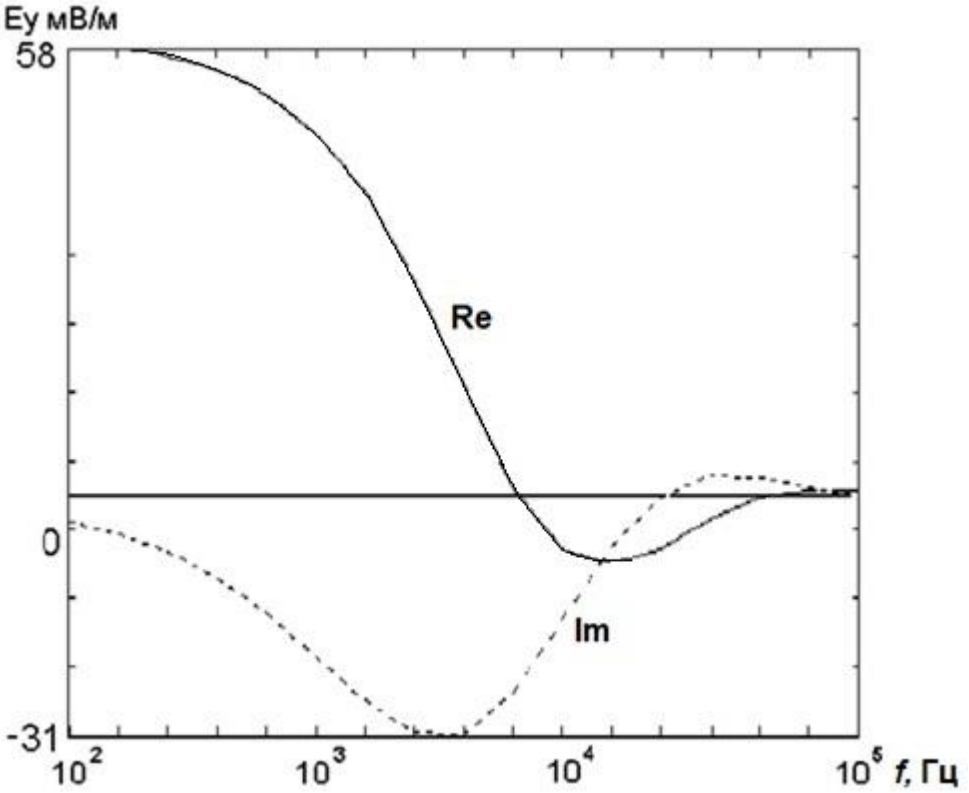


Рис. 14. Частотные характеристики аномальной E_y составляющей (мВ/м) для точки, находящейся вне 3D тела в однородном электрическом поле E_y^o

На рис. 14 приведены частотные характеристики E_y составляющей аномального электрического поля (мВ/м) модели для точки, находящейся вне 3D тела (x = 50 м, y = 100 м, z = 0 м), в диапазоне частот $f = 10^2 \div 10^5$ (Гц). Вид приведенной частотной характеристики E_y составляющей поля характерен для частотной характеристики электрического поля электрического диполя. Частотные характеристики составляющих аномального магнитного поля аналогичны приведенной на рис. 14 частотной характеристике E_y составляющей электрического поля. В предельном случае постоянного тока, составляющие аномального электромагнитного поля, определяемые в результате решения шестикомпонентной системы уравнений (10) и трехкомпонентной системы (1), тождественно равны.

Модель 2. Рассмотрим расчет переменного электромагнитного поля, когда 3D проводящее тело находится в непроводящей среде. В этом частном случае отсутствует электрическая поляризация 3D тела токами проводимости, и для решения задачи используется система уравнений (4.21).

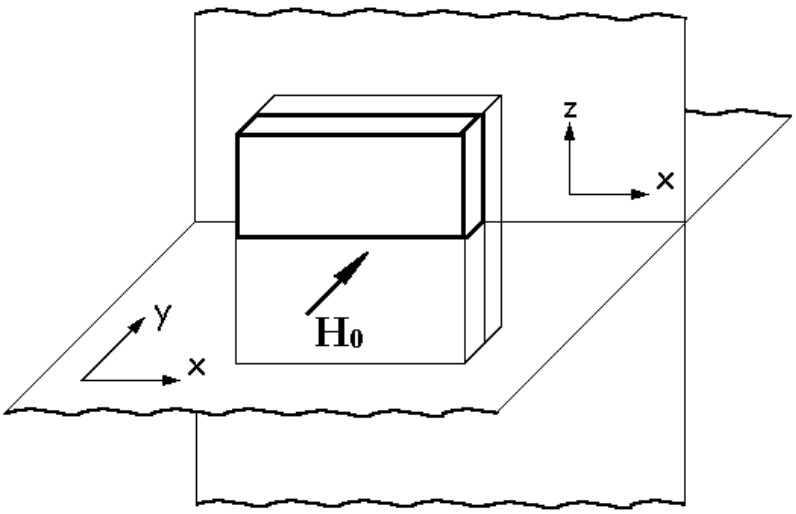


Рис. 15. Геометрия модели 3D проводящего тела, находящегося в однородном внешнем переменном магнитном поле H_y^o

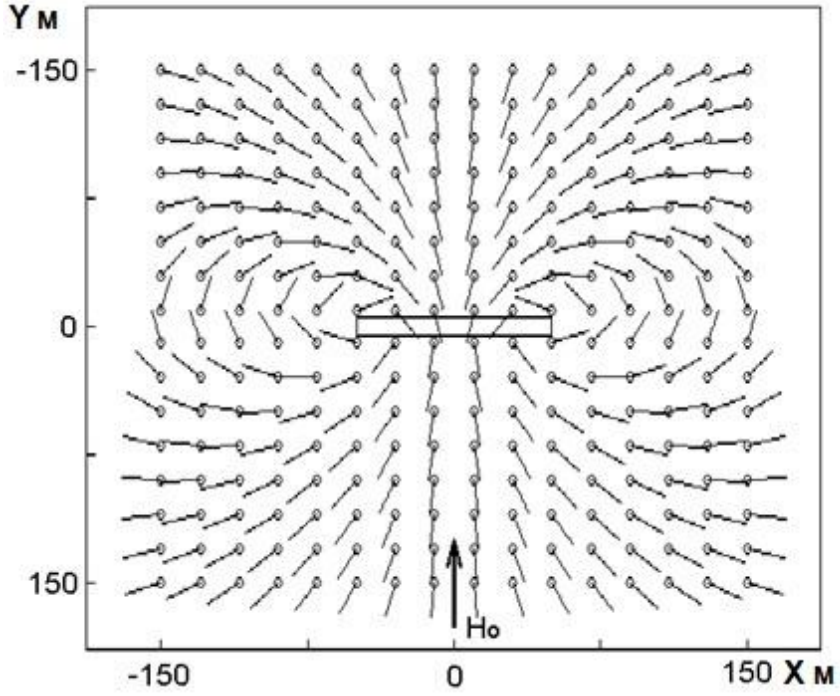


Рис. 16. План распределения векторов *Re* компонентов аномального магнитного поля в плоскости XOY, вдоль внешнего магнитного поля H_y^o

На рис. 15 приведена геометрия 3D модели однородного тела, находящегося в однородном переменном магнитном поле с амплитудой напряженности H_y^o = 1 А/м. Параметры расчетов: электропроводности среды σ_o = 0 См/м, однородного тела σ_V = 1 См/м, частота $f = 10^4$ Гц, размеры 3D тела по осям составляют 55 х 5 х 55 м.

На рис. 16 приведен план распределения векторов *Re* компонентов аномального магнитного поля в плоскости XOY, вдоль направления внешнего магнитного поля H_y^o.

Из плана распределения аномального магнитного поля видно, что в соответствии с законом взаимоиндукции, вблизи проводящего 3D тела оно направлено против первичного поля H_y^o и эквивалентно аномальному магнитному полю вторичного магнитного диполя, возникающего в центре 3D тела и ориентированного против направления внешнего магнитного поля.

План распределения *Im* компонентов аномального магнитного поля выглядит аналогично плану для *Re* компонентов, поскольку знаки *Re* и *Im* компонентов совпадают.

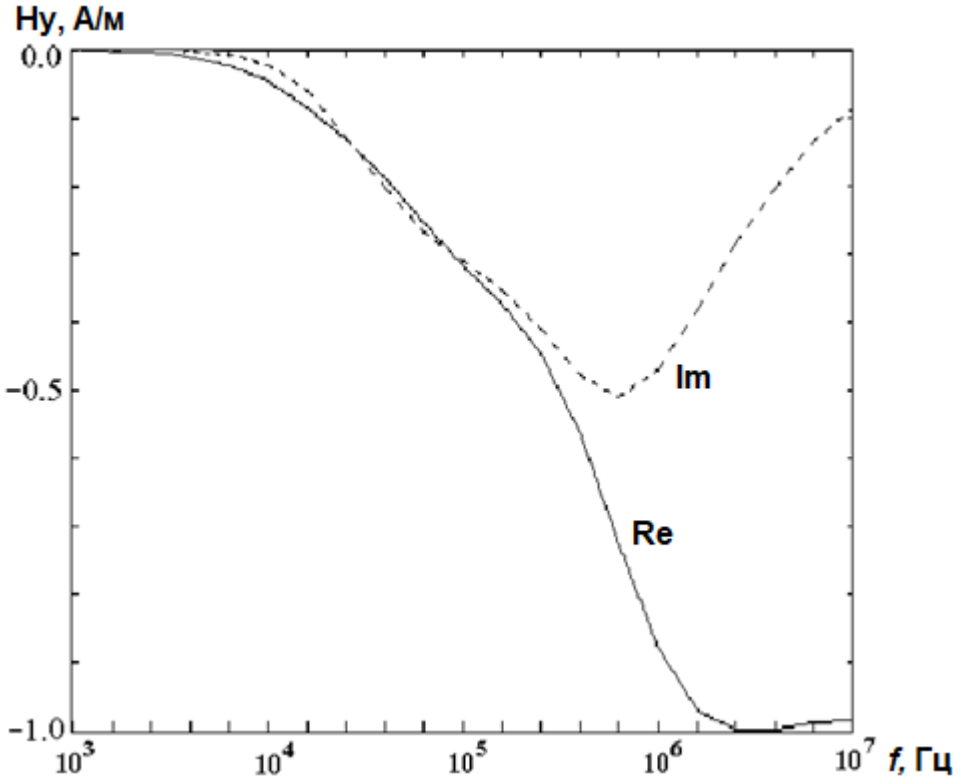


Рис. 17. Графики частотных характеристик *Re* и *Im* компонентов H_y составляющей напряженности аномального магнитного поля для точки, находящейся вне 3D тела вблизи центра

На рис. 17 приведены графики частотных характеристик *Re* и *Im* компонентов напряженности аномального магнитного поля (А/м) для точки, находящейся вне проводящего 3D тела вблизи его центра с координатами y = z =

0 (м), x = 20 (м). Вид частотных кривых для точек наблюдений, удаленных от 3D тела, подобен приведенному выше.

Рассмотрим вид распределения и закономерности изменения электромагнитного поля внутри проводящего тела.

На рис. 18 приведены графики частотных характеристик *Re* и *Im* компонентов напряженности аномального магнитного поля (А/м) для точки, находящейся внутри проводящего 3D тела вблизи его кромки с координатами y = z = 0 (м), x = -50 (м).

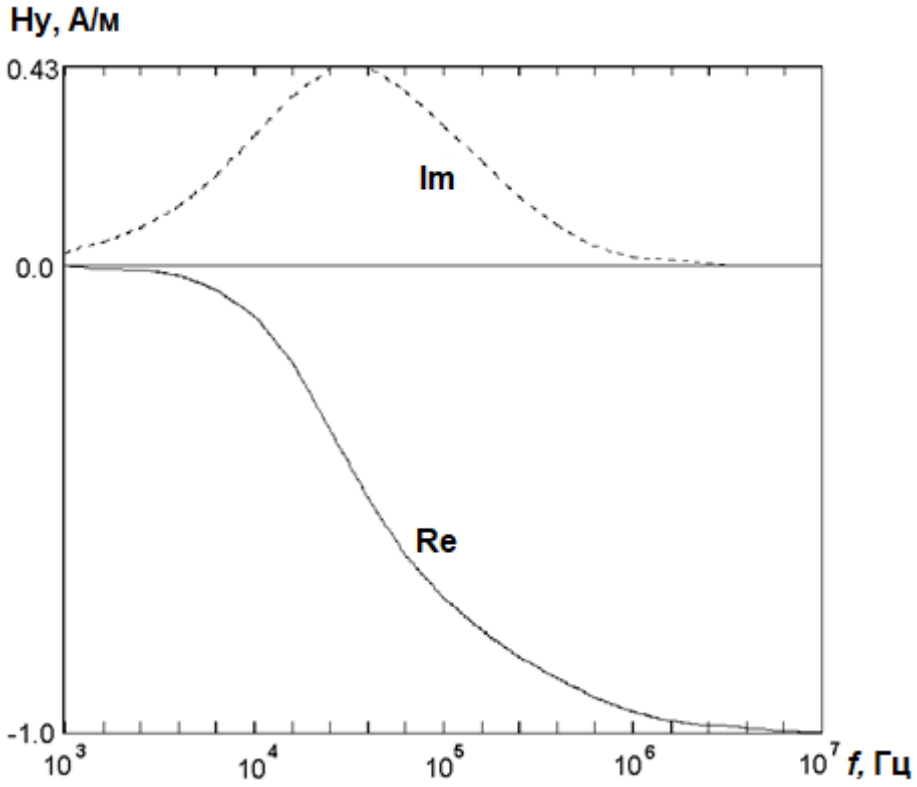


Рис. 18. Частотные характеристики *Re* и *Im* компонентов H_y составляющей аномального магнитного поля для точки, находящейся внутри 3D тела

Из графиков рис. 18 видно, что с повышением частоты величина магнитного поля увеличивается по абсолютной величине до значения, равного величине внешнего поля, но при этом имеет встречное направление.

На рис. 19 приведен план *Re* компоненты H_y - составляющей магнитного поля внутри проводящего 3D тела для плоскости XOZ, поперечной внешнему магнитному полю, для частоты $f = 10^4$ Гц. Как видно из рис. 19, величина магнитного поля увеличивается при удалении от центра тела к его внеш-

ней границе. С увеличением частоты поля магнитное поле в центре убывает к нулю, при этом значения поля вблизи внешней границы уменьшаются в меньшей степени.

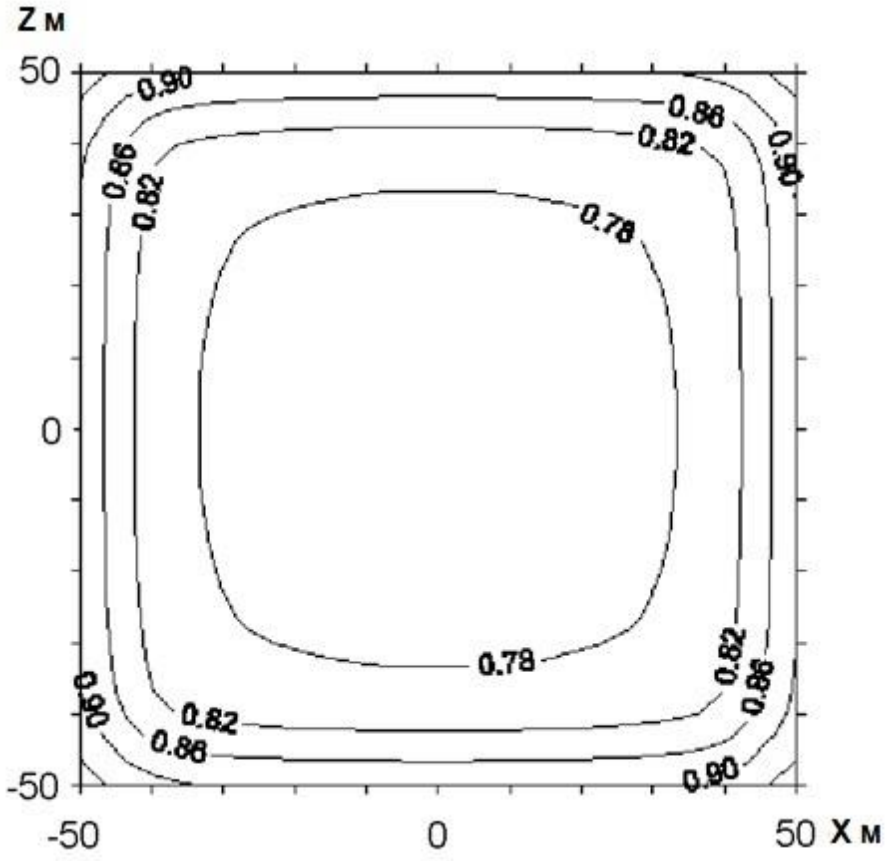


Рис. 19. План изолиний *Re* компоненты H_y - составляющей магнитного поля в плоскости XOZ, поперечной внешнему магнитному полю H_y^o

На рис. 20 приведен план векторов *Re* компонентов внутреннего электрического поля для плоскости XOZ, поперечной внешнему магнитному полю H_y^o. Поскольку вмещающая среда является непроводящей, возникающее внутри проводящего тела электрическое поле обусловлено только изменением индукции магнитного поля. Силовые линии электрического поля образуют в плоскости, поперечной внешнему магнитному полю H_y^o, замкнутые на себя линии.

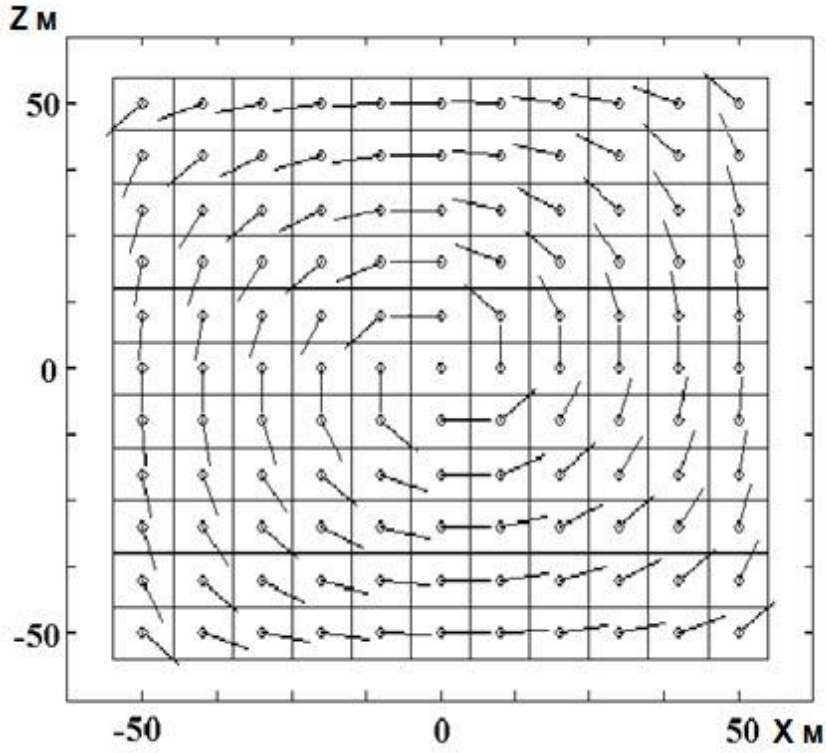


Рис. 20. План векторов *Re* компонентов электрического поля в плоскости XOZ, поперечной внешнему магнитному полю H_y^o

Из приведенного плана видно, что в плоскости XOZ внутри проводящего 3D объема индукционные токи направлены в соответствии с правилом Ленца: создаваемое ими по закону Био–Савара магнитное поле препятствует изменению внешнего магнитного поля.

На рис. 21 приведены графики частотных характеристик *Re* и *Im* компонентов E_y (мВ/м) для точки, находящейся внутри проводящего 3D тела вблизи его кромки с координатами y = z = 0 м, x = -50 м. На рис. 22 приведен план изолиний *Re* компонентов электрического поля (мВ/м) внутри проводящего 3D тела в плоскости XOZ, поперечной вектору нормального поля H_y^o Как видно из рис.22, величина индукционного электрического поля увеличивается по мере удаления от центра тела к периферии.

Рис. 19, 22 наглядно показывают скин - эффект внутри проводника, заключающийся в «выдавливании» электромагнитного поля к внешней границе.

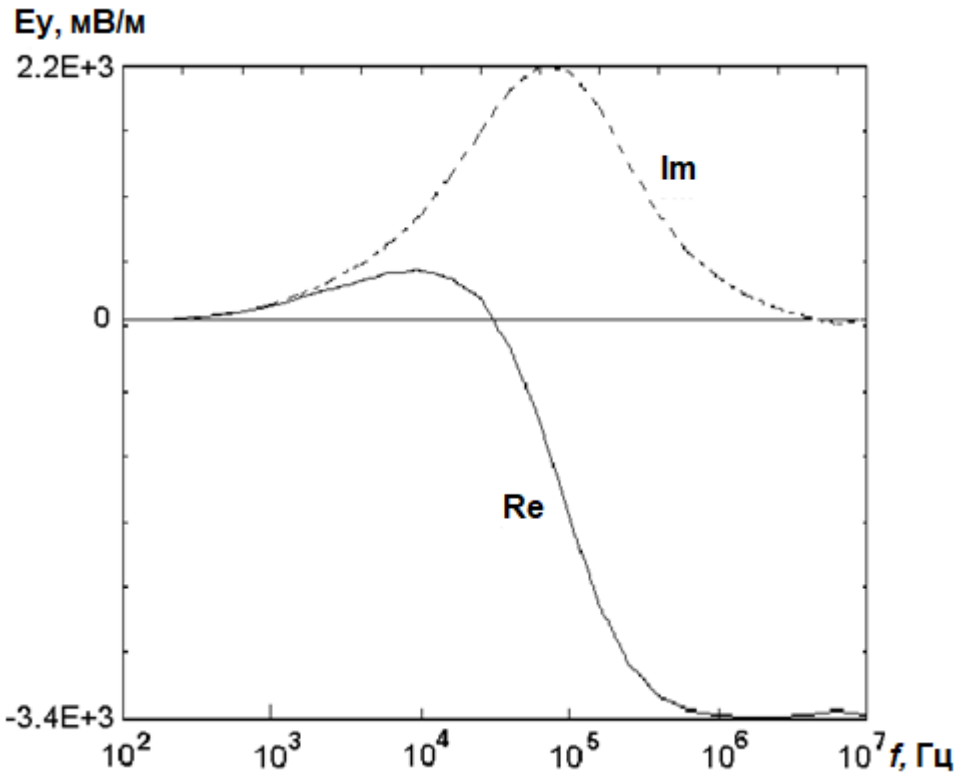


Рис. 21. Графики частотных характеристик *Re* и *Im* компонентов E_y - составляющей напряженности электрического поля

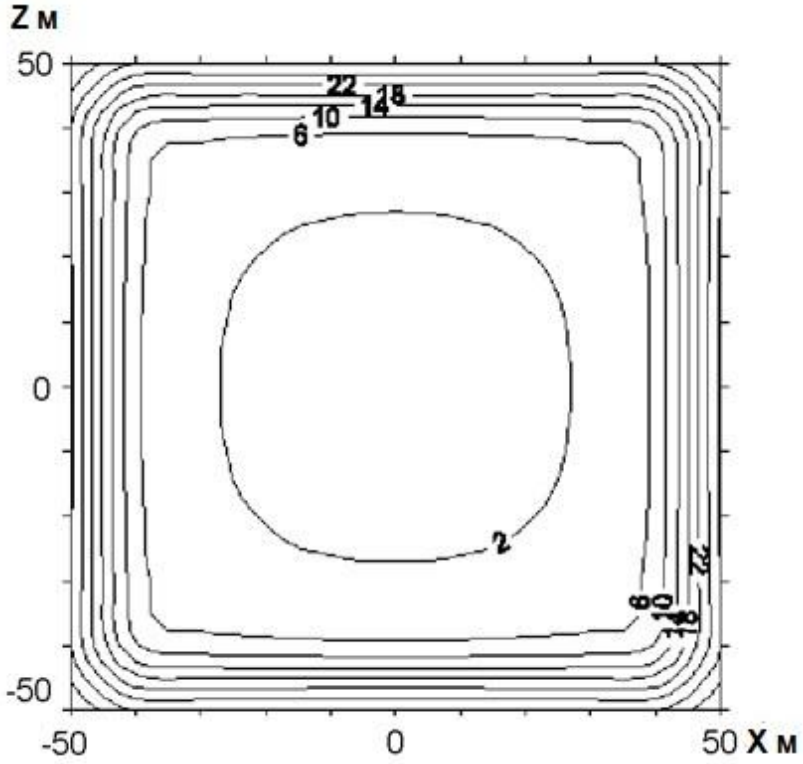


Рис. 22. План изолиний *Re* компонентов электрического поля (мВ/м) внутри проводящего 3D тела в плоскости XOZ, поперечной вектору H_y^o

Модель 3. Рассмотрим расчет переменного электромагнитного поля для 3D проводящего однородного тела в форме куба, находящегося в непроводящей среде в однородном низкочастотном внешнем магнитном поле. Этот случай позволяет провести численное сравнение результатов математического моделирования с аналитическим решением задачи о рассеянии однородного гармонического поля на проводящей сфере. Формулы для аналитического расчета магнитного поля сферы приведены в работах [Дивильковский, 1939; March, 1953; Светов, 1973] и имеют вид:

$$H_r = H_0\left(1-\frac{a^3}{r^3}D\right)\cos\theta,\ H_\theta = -H_0\left(1+\frac{a^3}{2r^3}D\right)\sin\theta,$$

где $D=\frac{3cth(ka)}{ka}-\frac{3}{(ka)^2}-1\approx,\ k=\sqrt{j\omega\mu_0\sigma}\,,\ \boldsymbol{H}_0 = H_0\cdot\boldsymbol{k}\,.$

На рис.23 приведена геометрия 3D модели проводящего тела в виде куба, находящегося в однородном переменном магнитном поле H_z^o.

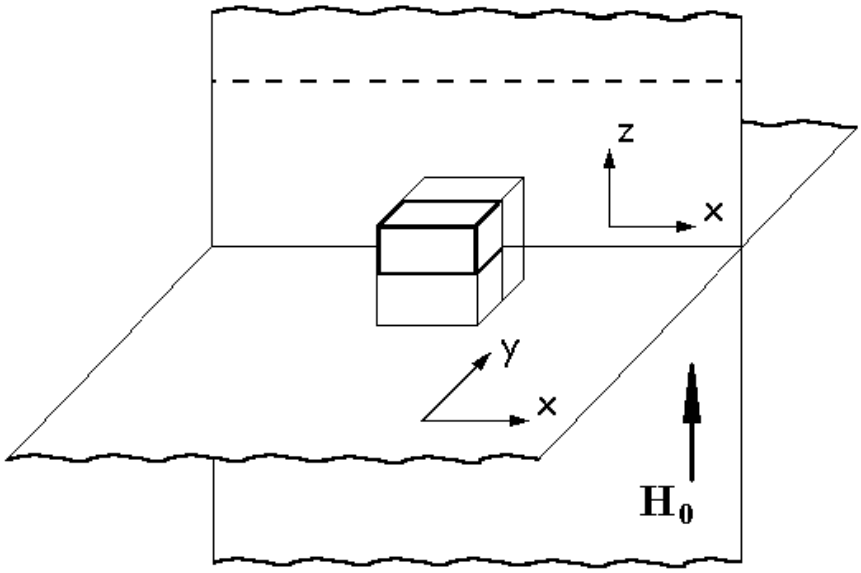


Рис. 23. Геометрия модели 3D проводящего тела в виде куба, находящегося в однородном переменном магнитном поле H_z^o. Штриховая линия - профиль наблюдений y = 0.

Параметры расчетов: величина напряженности нормального магнитного поля H_z^o = 1 (А/м), электропроводность среды σ_o = 0 (См/м), электропровод-

ность однородного тела $\sigma_V = 1$ (См/м), $f = 10^4$ (Гц), ребро куба $d = 50$ (м), расстояние от центра тела до линии наблюдений 250 (м).

На рис. 24 и рис. 25 приведены графики *Re* и *Im* составляющих напряженности магнитного поля H_x и H_z по профилю наблюдений. Цифрами на кривых обозначено число разбиений каждой стороны куба на элементарные объемы. Составляющие магнитного поля от проводящей сферы, обозначены буквой S. Объем сферы радиуса a принят равным объему куба $V_{3D} = d^3 = 4\pi a^3 / 3 = V_S$.

Как видно из приведенных графиков на рис. 24, кривые *Re* компонентов поля для сферы и куба практически сливаются. Для *Im* компонентов поля рис. 25 достаточно хорошее приближение поля куба и сферы равных объемов достигается при разбиении проводящего куба уже на $5^3 = 125$ элементов.

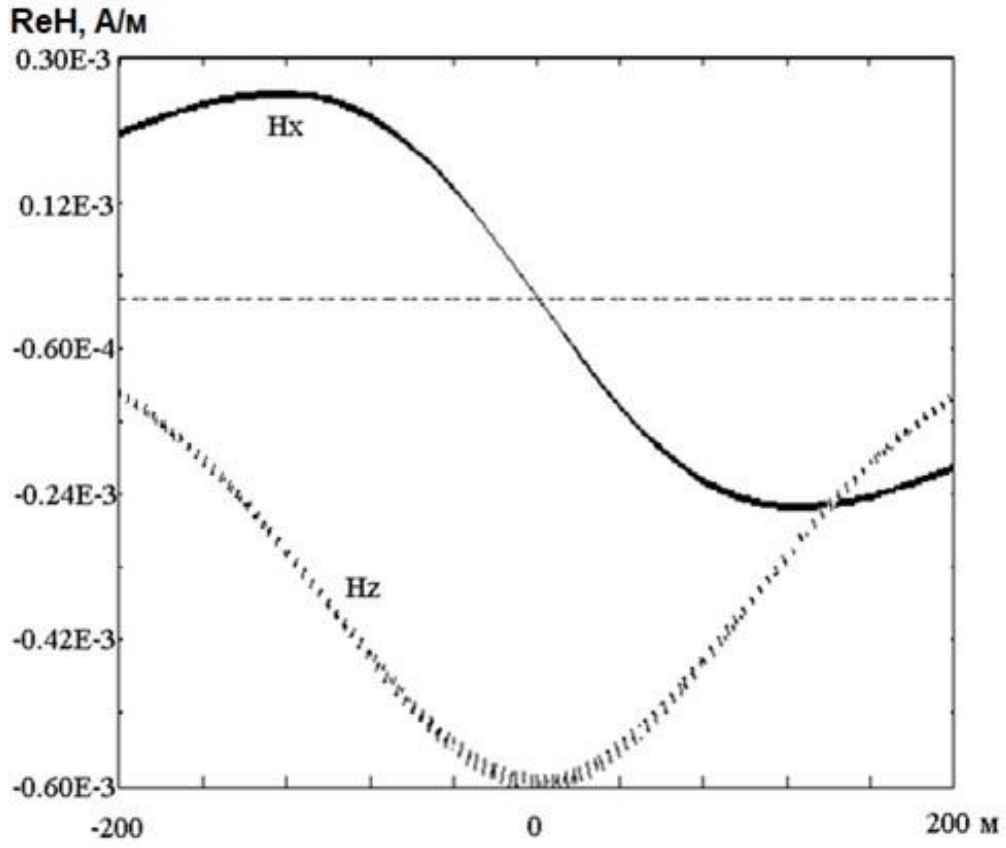


Рис. 24. Графики $Re\,H_x$, $Re\,H_z$ проводящих сферы и куба по линии X в однородном магнитном поле.

При разбиении проводящего куба на 125 элементов достигается доста-

точно хорошее совпадение величин и характера поведения напряженности магнитного поля куба (индекс V) и сферы (индекс S). Для наилучшего совпадения величин поля проводимость угловых элементов куба приравнена к 0.

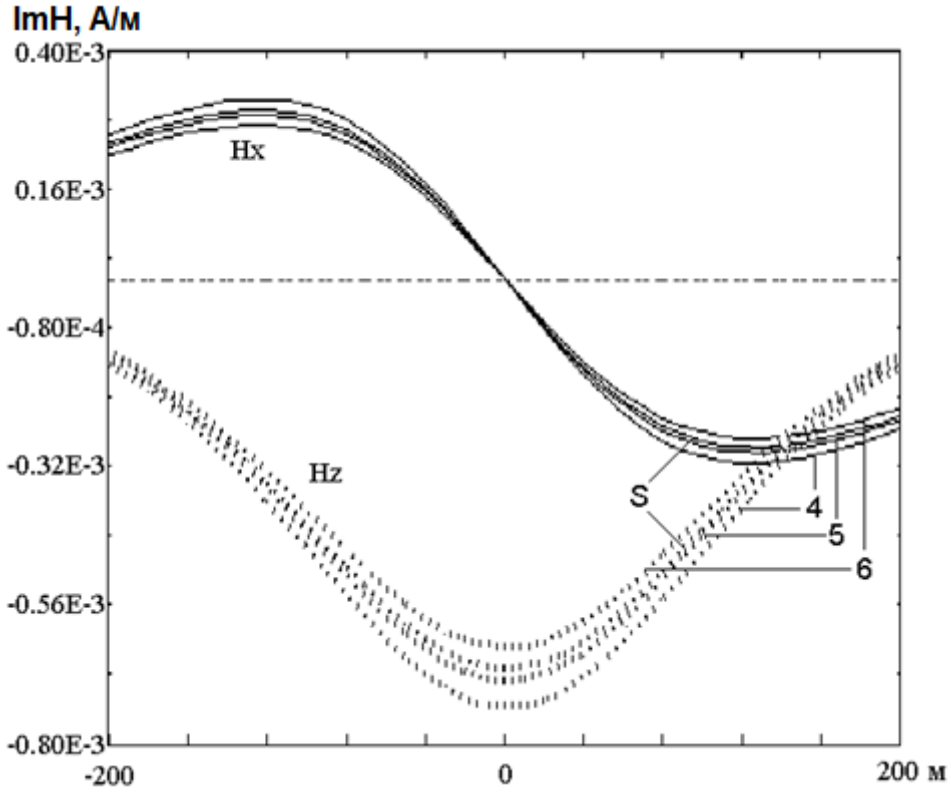


Рис. 25. Графики $Im\,H_x$, $Im\,H_z$ проводящих сферы (индекс S) и куба по линии X. Шифр кривых – число разбиений ребра куба

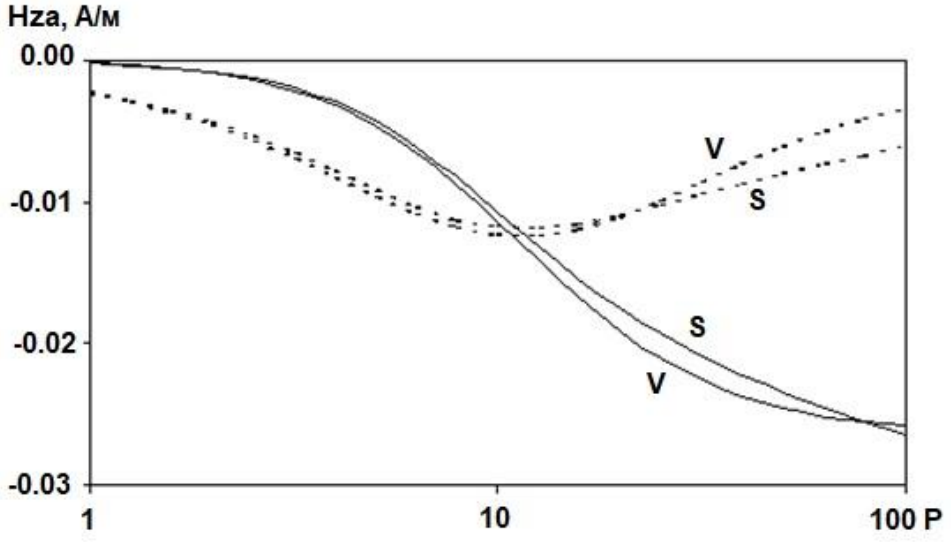


Рис. 26. Графики характеристик *Re* (сплошные) и *Im* (штриховые) H_z на полярной оси *Z* проводящих сферы (S) и куба (V) от параметра $P = \omega\mu_0\sigma a^2$.

На рис. 26 приведены частотные характеристики *Re* и *Im* компонентов

H_z – составляющей напряженности аномального магнитного поля (А/м) для точки, находящейся на полярной оси z = 250 м вне проводящих 3D тела и сферы равных объемов. Ось абсцисс – волновой параметр сферы $P = \omega\mu_0\sigma a^2$.

Модель 4. Рассмотрим пример расчета поля для 3D проводящего однородного тела, находящегося в проводящей среде в неоднородном переменном электромагнитном поле магнитного диполя при различной ориентации тела по отношению к направлению внешнего поля.

На рис. 27 приведена геометрия 3D модели проводящего тела в виде тонкой пластины с различным соотношением длин сторон $a > h$, находящегося в переменном скрещенном поле при различной ориентации составляющих напряженностей электромагнитного поля по отношению к сторонам проводящего тела.

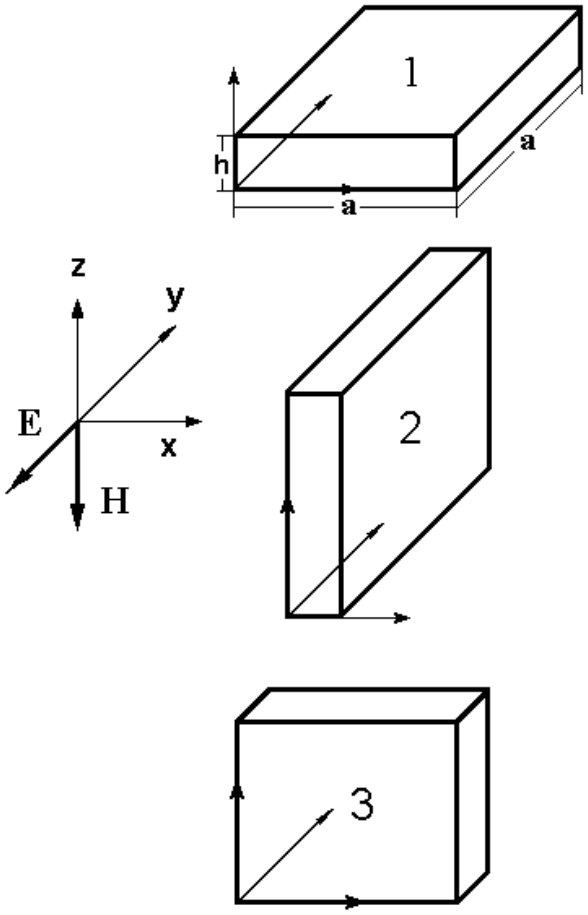


Рис. 27. Геометрия моделей 3D проводящего тела в виде тонкой пластины с длинами сторон $a>h$, находящегося в переменном скрещенном электромагнитном поле магнитного диполя

Такое направление внешнего электромагнитного поля характерно для поля вертикального магнитного диполя или незаземленного контура с моментом, направленным по оси Z, либо для плоской электромагнитной волны.

Параметры расчетов модели: M_z = 10^3 А*м^2, σ_o = 10^{-3} См/м, σ_V = 0.1 См/м, f = 10^4 Гц, размеры тела a = 100 м, h = 10 м, расстояние от центра тела до линии наблюдений по оси Z = 300 м, расстояние от диполя до центра тела по оси X=200 м. Из анализа предыдущих расчетов следует, что в первом случае аномальное электромагнитное поле нужно ожидать максимальным, поскольку присутствуют и электрическое и магнитное возбуждение - электрическое поле направлено вдоль длинной оси проводника, а магнитное - поперек максимальной плоскости тела. Во втором случае магнитное возбуждение будет значительно меньше, чем в первом, поскольку оно направлено вдоль максимальной плоскости пластины, а электрическое – аналогично первому случаю. В третьем случае – оба типа возбуждения малы и аномальное поле по сравнению с предыдущими случаями следует ожидать минимальным.

Эти выводы подтверждают результаты расчетов, приведенные на рис. 28 и рис.29. На них приведены графики *Re Bz* (рис. 28) и *Im Bz* (рис. 29) составляющих аномального магнитного поля проводящей пластины при различном пространственном положении ее граней относительно внешнего поля (шифр кривых).

Для оценки влияния индукционной части поля на рисунках приведены результаты расчетов поля по шестикомпонентному уравнению (10) (шифр кривых - D6) и расчеты поля по трехкомпонентному уравнению (1) (шифр кривых - D3). Вид профильных кривых составляющей аномального магнитного поля показывает, что на данной частоте поле определяется как электрическим, так и магнитным возбуждением проводящего тела. При этом величина аномалии очень существенно зависит от взаимного направления внешнего поля и положения тела.

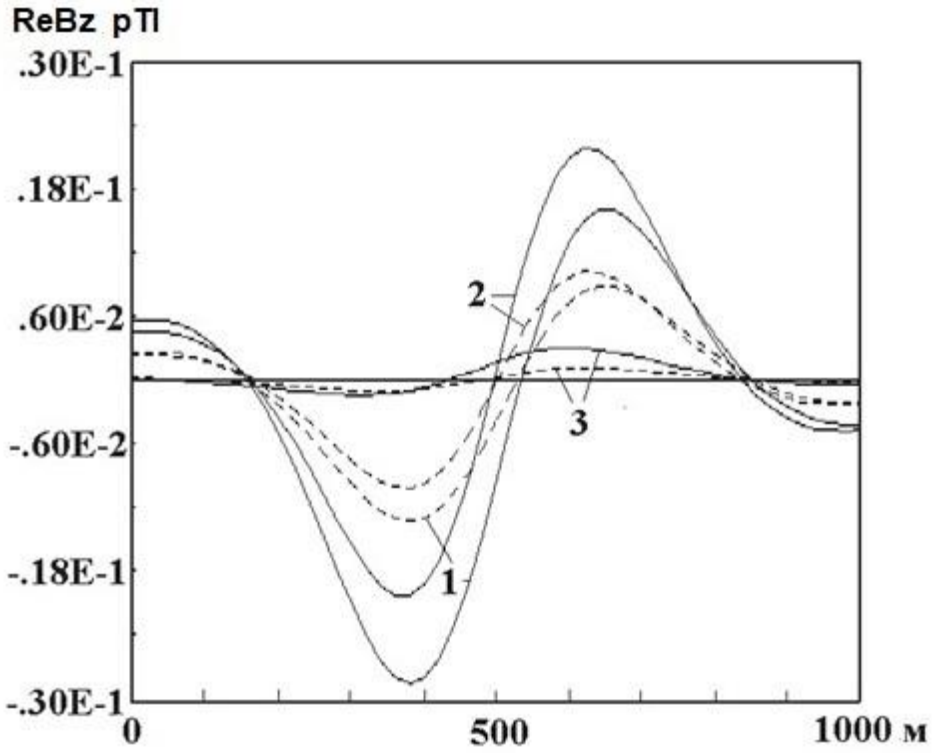


Рис. 28. Графики *ReBz* составляющей аномального магнитного поля проводящей пластины. Сплошные линии – расчет по шестикомпонентному уравнению (1), штриховые – расчет по трехкомпонентной системе уравнений. Частота f = 10 кГц. Шифр кривых соответствует модели рис. 27.

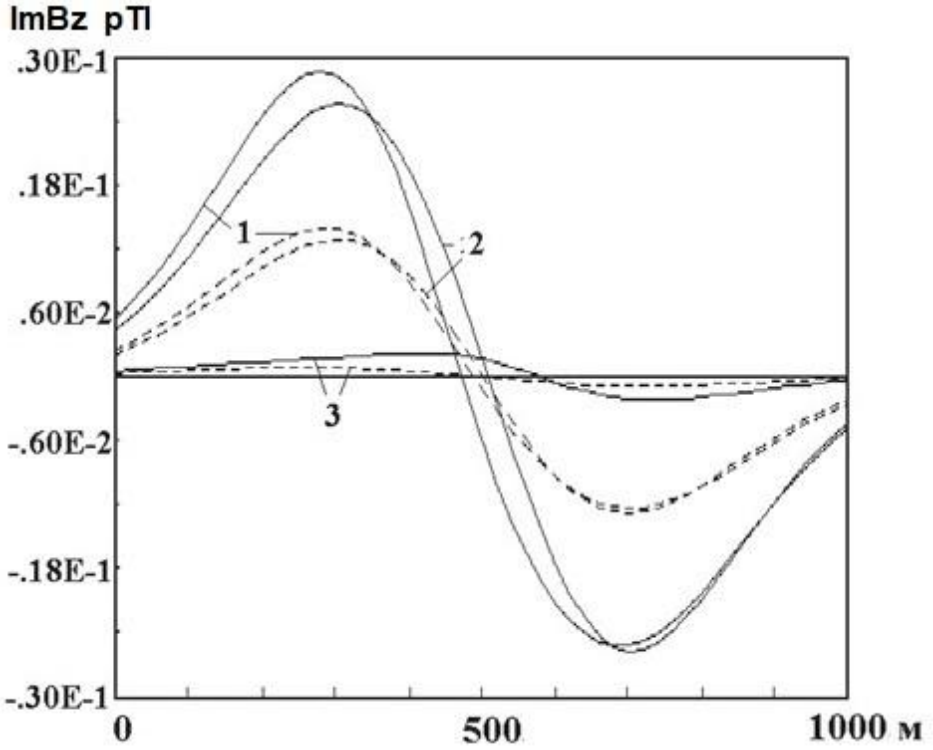


Рис. 29. Графики *ImBz* составляющей аномального магнитного поля проводящей пластины. Сплошные линии – расчет по шестикомпонентному уравнению (1), штриховые – расчет по трехкомпонентной системе уравнений. Частота f = 10 кГц. Шифр кривых соответствует модели рис.27

Для оценки влияния частоты проведены расчеты спектральной зависимости аномального поля в диапазоне частот от 10^3 до 10^5 Гц при тех же параметрах расчетов в точке наблюдений над центром тела X=400 м, *Z*=300 м. Расчеты показывают, что вид частотной зависимости *Bx* составляющей для данной геометрии положения источника, проводящего тела и линии наблюдений, определяется в основном электрическим возбуждением проводящего тела. В то же время поведение *Bz* составляющей поля определяются не только электрическим, но и магнитным возбуждением проводящего объекта.

На рис. 30 – 31 приведены частотные зависимости *Bz* составляющей магнитного поля при различном положении тела относительно направления внешнего поля.

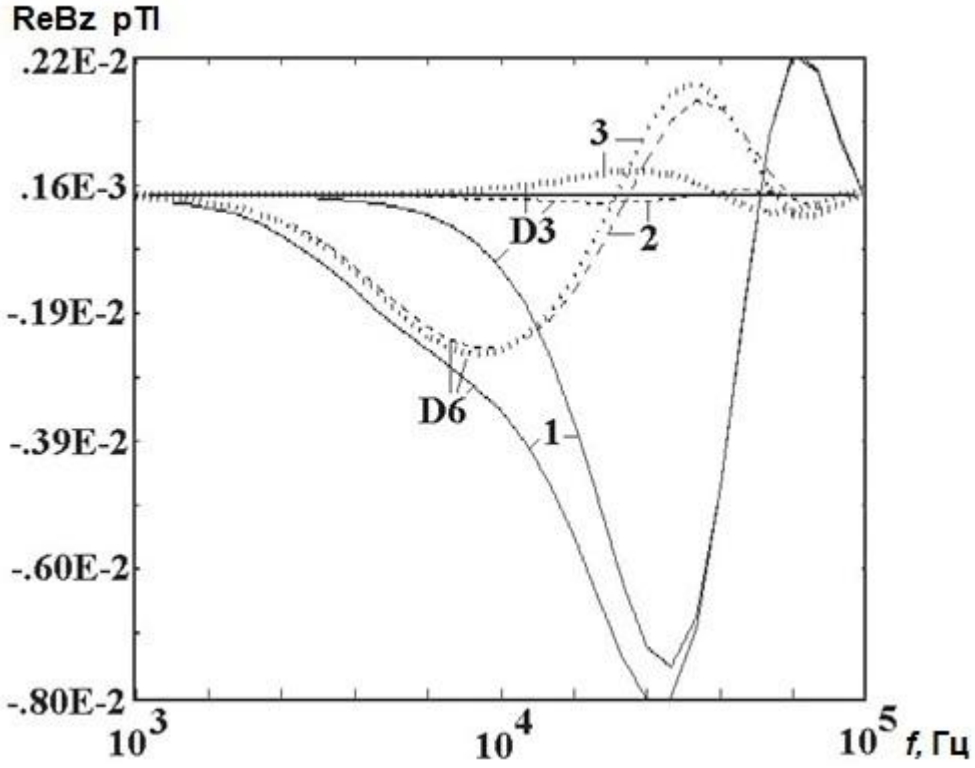


Рис. 30. Графики частотной зависимости *ReBz* составляющей аномального магнитного поля проводящей пластины. Точка наблюдений находится над центром тела на высоте z = 300 м. Шифр кривых 1,2,3 соответствует модели рис.27. D6 – расчет по шестикомпонентному уравнению (1), D3 – расчет по трехкомпонентному уравнению для напряженности электрического поля.

Для оценки влияния индукционной части поля на рисунках приведены результаты расчетов поля по шестикомпонентному уравнению (10) (шифр кривых - D6) и по трехкомпонентному уравнению (4.3) (шифр кривых - D3).

Из приведенных расчетов следует, что с повышением частоты поля до ~10^4 Гц величина *ReBz* (кривые D6 рис.34) растет по модулю пропорционально частоте для всех моделей 1-3 положения проводящего тела.

Достигнув экстремума для моделей 2 и 3, компонента *ReBz* уменьшается (по модулю) и с дальнейшим повышением частоты начинает осциллировать. Для модели 1 экстремум достигается при гораздо большей частоте.

Столь же сложной является частотная зависимость поведения компоненты *ImBz*, приведенная на рис.31.

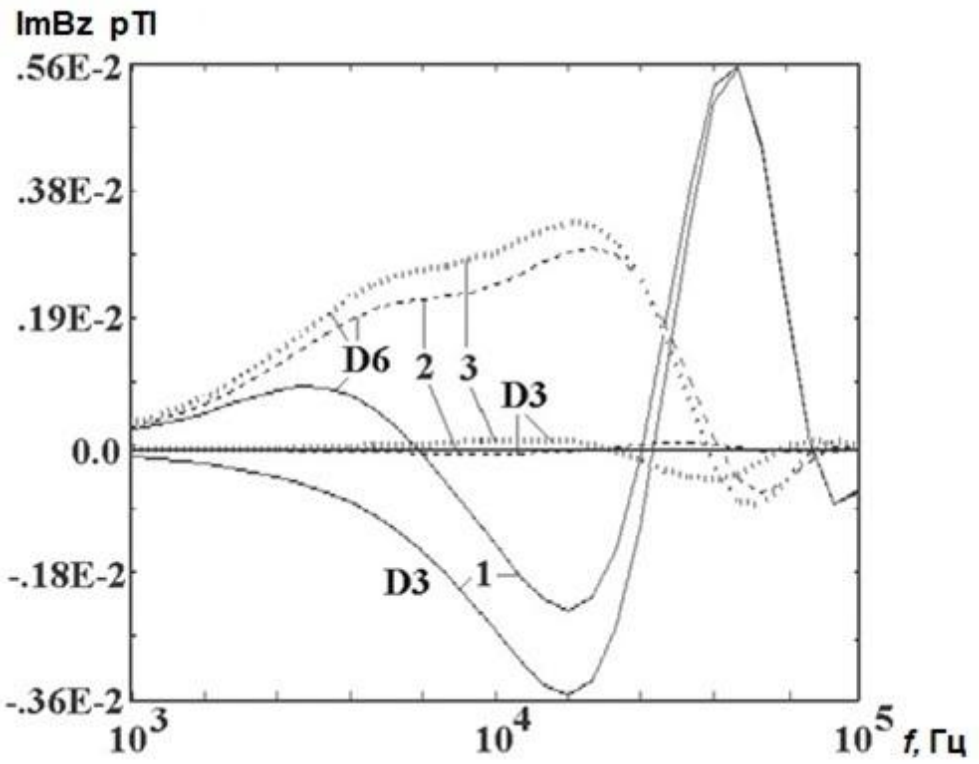


Рис. 31. Графики частотной зависимости *ImBz* составляющей аномального магнитного поля проводящей пластины. Шифр кривых 1,2,3 соответствует модели рис.27. D6 – расчет по шестикомпонентному уравнению (1), D3 – расчет по трехкомпонентному уравнению для напряженности электрического поля.

Как видно из приведенных рисунков 28 - 31 наблюдаются отличия поведения поля при расчетах с 6-ти компонентной системой уравнений (D6) и 3-х компонентной системой (D3), как для *Re*, так и для *Im* компоненты.

Эти отличия объясняются тем, что вклад в суммарную аномалию дает не только магнитное поле токов проводимости, но и магнитное поле индукционных токов. Отметим так же, что вклад в аномальное магнитное поле может

быть определен раздельно от токов проводимости и токов индукции, описываемых аномальными слагаемыми в уравнении (4.18).

В то же время формирование внутреннего электромагнитного поля есть совместное воздействие переменного и электрического и магнитного полей на проводящий объект, величина которого определяется решением системы интегральных уравнений.

На рис. 32 приведена зависимость *Bz* составляющей магнитного поля при различной относительной проводимости трехмерного тела для модели 1 (рис. 31) тела. Шифр кривых на рисунках – частота тока в кГц.

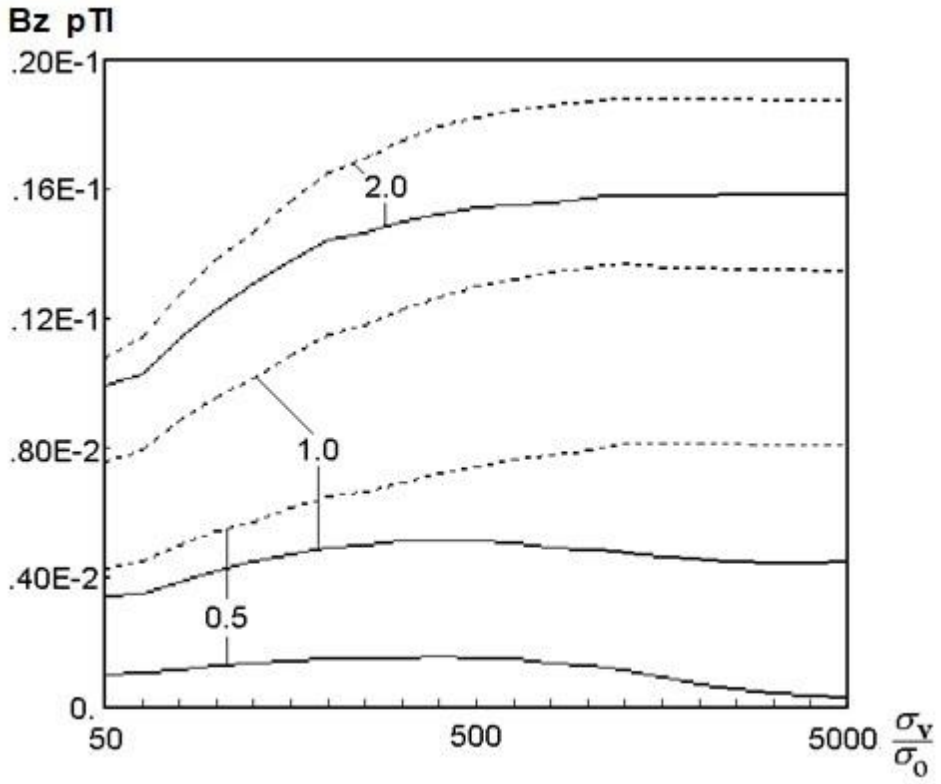


Рис. 32. Графики зависимости *Bz* -составляющей аномального магнитного поля *Re* (сплошные) и *Im* (штриховые) компонентов от относительной проводимости σ_V / σ_O проводящей пластины для модели 1 (рис. 27). Шифр кривых – частота тока в кГц.

Из расчетов, приведенных на рис. 32 следует, что с повышением относительной электропроводности 3D тела величина *Bz* составляющей магнитного поля достигает экстремального значения при соотношении электропроводностей ~ 1000. Дальнейшее увеличение относительной электропроводности тела не приводит к какому-либо увеличению аномалии. Это связано с тем, что

на данной частоте достигнуто максимальное электрическое и магнитное возбуждение 3D тела и электромагнитное поле полностью сконцентрировано на поверхности проводящего тела в скин-слое.

Рассмотренные выше примеры расчетов переменного электромагнитного поля при различных типах возбуждения проводящих 3D тел показывают основные физические закономерности перераспределения внешнего электрического и магнитного поля источника при раздельном и совместном возбуждении проводящих 3D тел электрическим и переменным магнитным полем.

6.2 Сопоставление результатов численного и физического моделирования.

Модель 1. Рассмотрим расчет переменного магнитного поля для 3D проводящего однородного тела в форме куба, находящегося в непроводящей среде в однородном низкочастотном внешнем магнитном поле магнитного диполя. Этот случай позволяет провести численное сравнение с результатами физического моделирования, выполненного применительно к индуктивной электроразведке методом индуктивного профилирования над проводящим шаром [Молочнов, Балобаев,1958]. Обобщения экспериментальных работ приведено в работе [Вешев, 1971].

В качестве модельного объекта использовался чугунный шар диаметром d = 0.16 м. В качестве установки использовалась экваториальная система из приемной и генераторной катушек малого диаметра с одинаковыми направлениями осей (установка ZZ), разносимых на расстояние r = 0.4 м (разнос) с моментом диполя $M_z = 10^3$ А·м^2. Расположение катушек – продольное (вдоль линии профиля над центром шара) и поперечное (середина установки проходит над центром шара). Физическое моделирование выполнялось с проведением модульных измерений амплитуд H_z магнитного поля с частотой тока f = 15 МГц. Ниже приведены графики ReB_{za} по оси X над шаром при продольном (рис.33) и поперечном (рис.34) расположении установки.

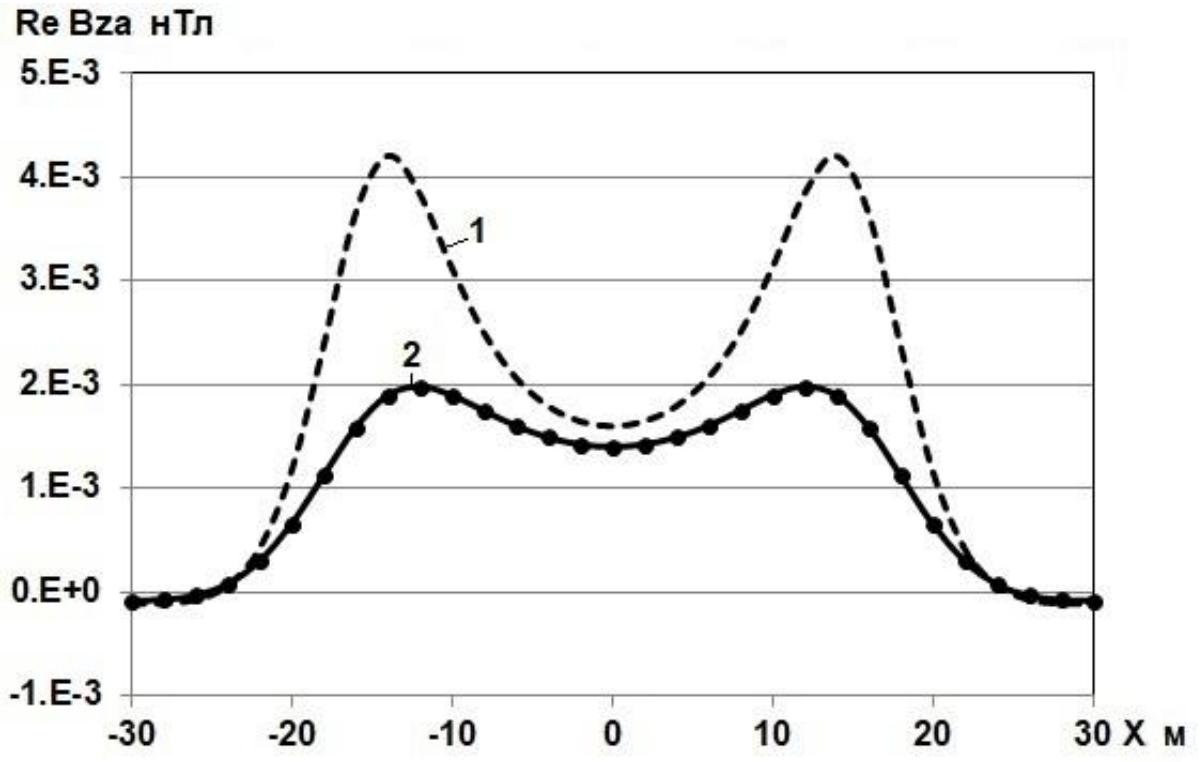


Рис. 33. Графики $Re\,B_{za}$ (нТл) по оси X над шаром продольной установки (шифр кривых - глубина центра шара: 1 – 11.3 м; 2 – 13 м)

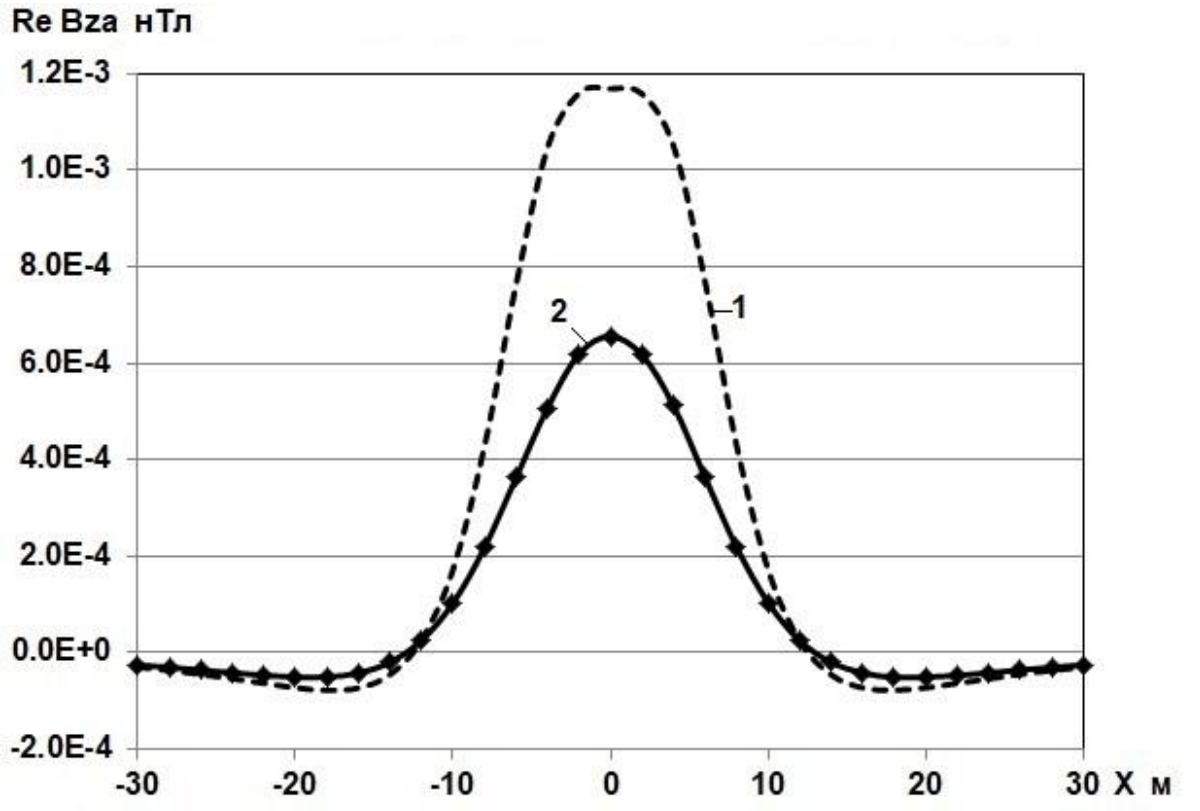


Рис. 34. Графики $Re\,B_{za}$ (нТл) по оси X над шаром поперечной установки (шифр кривых - глубина центра шара: 1 – 11.3 м; 2 – 13 м)

Для проведения математического моделирования создано специализированное программное обеспечение, реализующее систему интегральных соотношений для напряженности магнитного поля (4.21), описывающее возбуждение проводящего 3D тела переменным магнитным полем, находящимся в непроводящей вмещающей среде [Ратушняк, 2023].

Высокая частота тока в магнитном диполе в соответствии с частотной характеристикой рис.26 обуславливает перераспределение аномалии из квадратуры *Im* в *Re*. Локальный проводник при продольном расположении установки отмечается двумя экстремумами равной величины с расстоянием между аномалиями, близким к величине разноса. При поперечном расположении установки проводящее тело отмечается максимумом, при положении магнитного диполя над центром тела. В обоих случаях расположения установки, погружение проводящего тела приводит к уменьшению аномалии магнитного поля, что подтверждается расчетами.

Аналогичные модельные измерения над проводящим шаром приведены в работе [Захаров, 1967]. В качестве модельного объекта использовался алюминиевый шар диаметром d = 0.05 м с удельной электропроводностью, равной σ = 0, $35 \cdot 10^8$ См/м, моделирующий проводящее рудное тело. В качестве установки использовалась экваториальная система из приемной и генераторной катушек малого диаметра с одинаковыми направлениями осей (установка *ZZ*), разносимых на различное расстояние (разнос r) с продольным направлением установки относительно профиля над центром шара вдоль оси X. Физическое моделирование выполнялось с проведением фазочувствительных измерений фаз φ_z и амплитуд H_z магнитного поля с частотой тока в магнитном диполе f = 500 Гц.

На рис.35 и 36 приведены графики рассчитанных амплитуд H_z и фаз φ_z, приведенных к величине первичного поля установки $H_z^0 = -1/(4\pi r^3)$, для соответствующей математической модели масштаба 100:1 над центром проводящего куба с ребром $h = d$, на разносах r = 5, 10, 15 м.

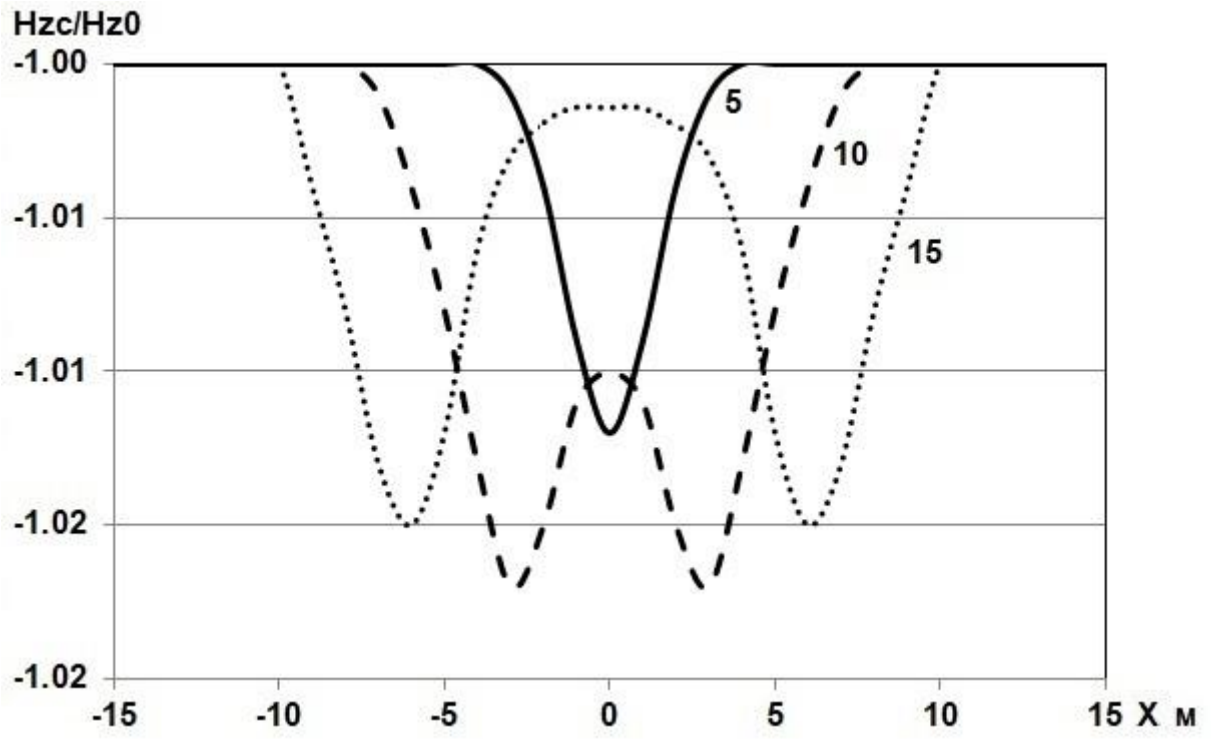


Рис. 35. Графики отношения амплитуд $\left|H_z\right| / H_z^0$, рассчитанных по оси X на расстоянии z = 4 м над центром шара на разносах r = 5, 10, 15 м (шифр кривых)

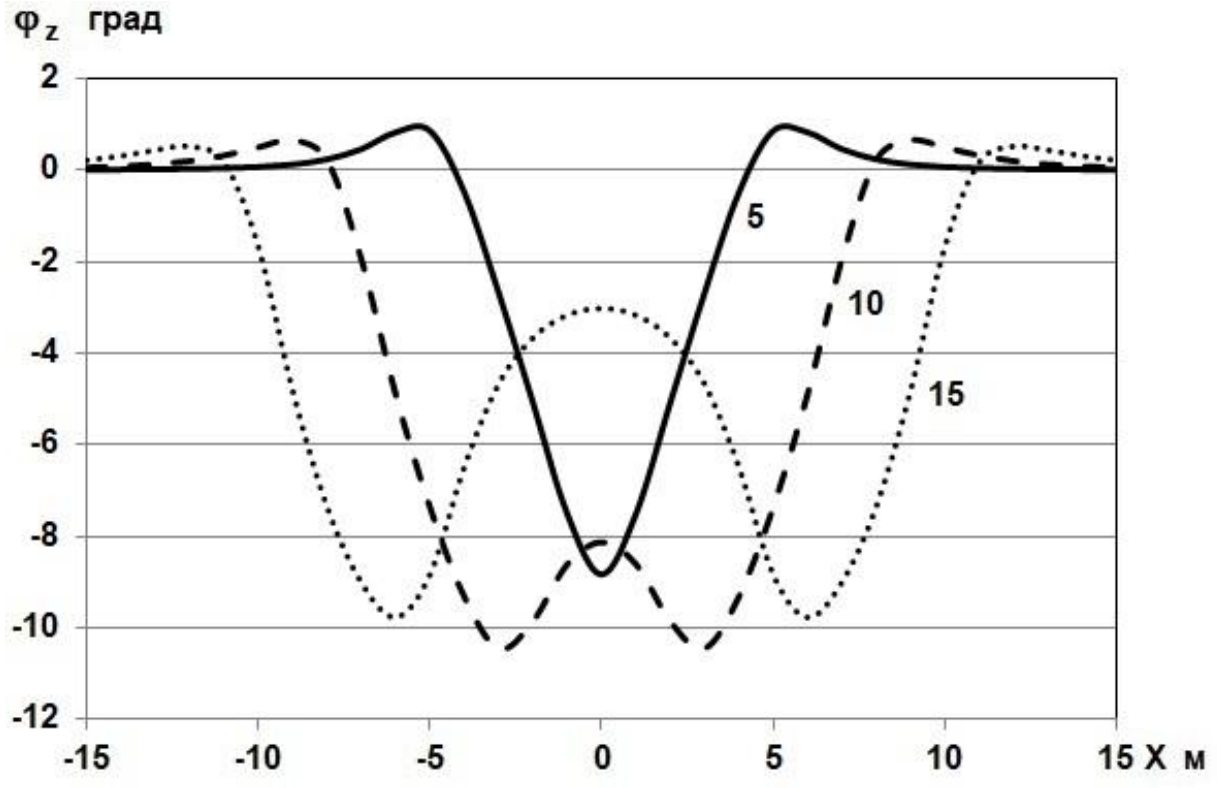


Рис. 36. Графики фаз φ_z, рассчитанных по оси X на расстоянии z = 4 м над центром шара на разносах r = 5, 10, 15 м (шифр кривых)

Подобие математической и физической моделей обеспечивается равенством величин волновых параметров моделей $P_{ф} = \omega\mu_0\sigma_{ф}d^2 = \omega\mu_0\sigma_{м}h^2 = P_{м}$ за счет изменения электропроводности математической модели $\sigma_{м}$.

Отмечая качественное соответствие рассчитанных и экспериментальных результатов, приведенных в [Захаров, 1967, стр.64], отметим, что величина рассчитанного модуля поля превышает величину модуля первичного поля источника $|H_z| = \sqrt{Re\,H_z^0 + Im\,H_z^a} > \left|H_z^0\right|$, поскольку аномалия магнитного поля содержится в основном в квадратуре $Im\,H_z^a$. Соответственно, приведенное поле составляет величину по модулю превышающую единицу. Для соответствия величин фазовых углов необходимо более точное определение величины удельной электропроводности шара, которое приведено, очевидно, по справочной литературе. В приведенных расчетах принято σ = $5\cdot10^{-3}$ См/м, что соответствует волновому параметру 3D объема $P = 5\cdot10^{-4}$.

Модель 2. Модельные измерения с проводящим 3D-телом выполнены авторами работы [Лебедкин, 1990] применительно к электроразведке методом дипольного электромагнитного профилирования скважин (ДЭМПС).

В качестве проводящего объекта использовался прямоугольный параллелепипед из тонкого дюралюминиевого листа толщиной 2.7 мм, моделирующий тонкий проводящий пласт с размерами по простиранию, существенно превосходящими мощность и размер установки. В качестве установки использовалась система из трех ортогональных приемных и одной генераторной катушек малого диаметра, разносимых на различное расстояние L (разнос). Ось датчика H_z - составляющей магнитного поля совпадает с направлением момента генераторной катушки M_z, соответствующей магнитному диполю. Физическое моделирование выполнялось с проведением модульных измерений амплитуд H_z магнитного поля с частотой тока в магнитном диполе f = 1125 Гц.

На рис. 37 приведены графики вдоль оси Z рассчитанных мнимых квад-

ратур H_y и H_z, приведенных к величине первичного поля установки H_z^0 = $1/(2\pi r^3)$ для разноса L = 12 м, для математической модели, соответствующей физической в масштабе 60 : 1.

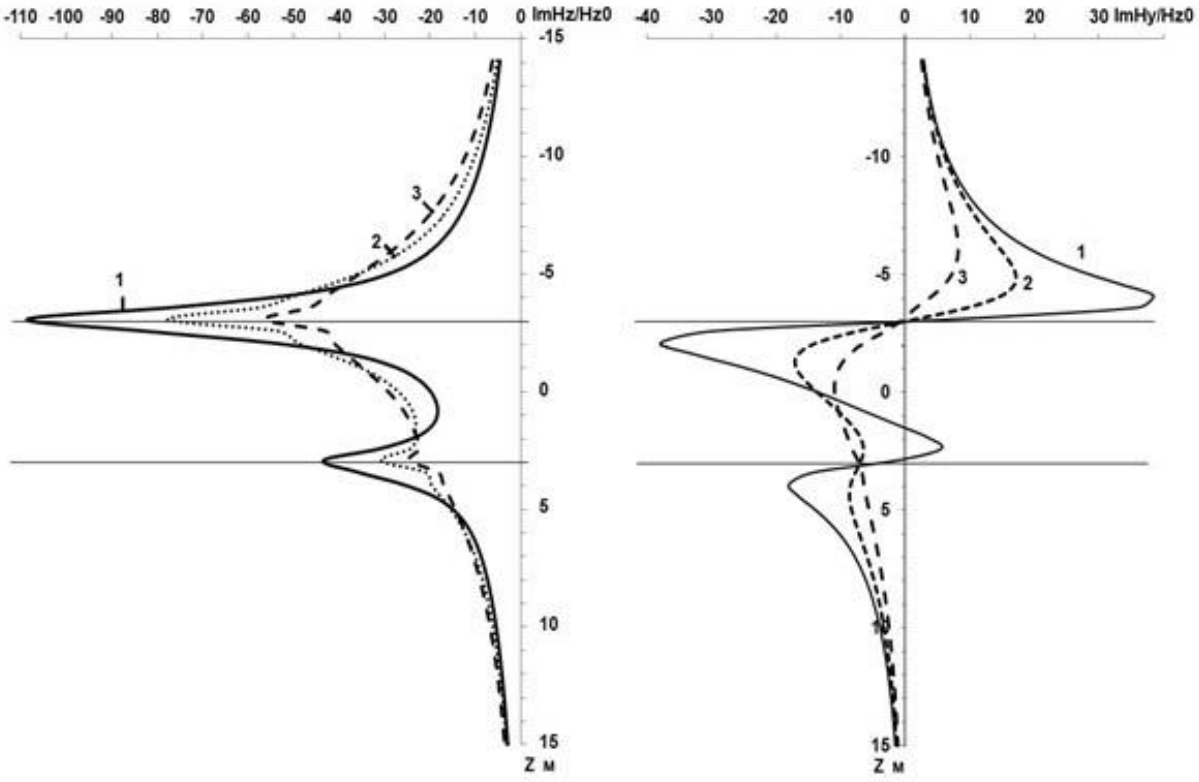


Рис. 37. Графики отношений осевой $Im H_z / H_z^0$ (слева) и поперечной $Im H_x / H_z^0$ (справа) составляющих магнитного поля по оси *Z*, пересекающей проводящее 3D тело на различном расстоянии *y* (м) от вертикальной границы (шифр кривых)

При различных положениях линии наблюдений, направленной по оси *z* и пересекающих проводник на небольшом расстоянии *y* до вертикальной границы тела, верхняя и нижняя границы проводящего 3D объекта отмечаются однополярными аномалиями осевой составляющей поля $Im H_z$ на границах тела и знакопеременными аномалиями поперечной составляющей $Im H_x$. Однополярные аномалии вертикальной составляющей магнитного поля $Im H_z$ напротив границ тела объясняются концентрацией индукционных токов вблизи внешней границы тела. Знакопеременные аномалии горизонтальной составляющей $Im H_x$ обусловлены скачком (разрывом) магнитного

поля, пересекающим поверхность с токами.

Величины аномалий уменьшаются по мере приближения линии наблюдений к центру проводящего объекта ($y \rightarrow y_s$) и в предельном случае положения в центре объекта равняются нулю ввиду симметрии модели. Аномалии вертикальной составляющей магнитного поля, измеренные внутри модельного объекта, имеют вид постоянных значений [Лебедкин, 1990, рис.3.35], что связано с погрешностями физического моделирования. При этом аномалии горизонтальной составляющей магнитного поля снаружи проводящего модельного объекта являются знакопеременными, что соответствует теоретическим расчетам.

Сопоставление материалов физического моделирования и расчетов переменного магнитного поля при магнитном типе возбуждения локального проводящего тела магнитным диполем показывают их качественное соответствие.

Рассмотренные выше примеры изучения переменного электромагнитного поля при различных типах возбуждения проводящих 3D тел показывают основные физические закономерности перераспределения внешнего электрического или магнитного поля при раздельном возбуждении проводящих тел. Однако в проводящих средах присутствует возбуждение 3D тел как электрическим, так и переменным магнитным полем.

Заключение

- проведенное сравнение расчетов и результатов физического моделирования для аналогичных физико-геометрических условий и параметров источников, а также проводящего 3D-тела при магнитном типе возбуждения показало хорошее качественное и количественное соответствие величин и пространственно-частотных характеристик составляющих магнитного поля;
- сопоставление результатов является тестом правильности алгоритма расчетов гармонического электромагнитного поля стороннего источника на проводящем 3D-объекте;
- для гармонического режима изменения электромагнитного поля описание

возбуждения проводящего 3D-тела электрическим и переменным магнитным полем позволяет адекватно описать парный и перекрестный эффекты физических полей;

- выполненное сравнение указывает на необходимость учета индуктивного слагаемого, обусловленного изменением магнитного поля по закону Фарадея, при проведении математического моделирования рассеяния гармонического электромагнитного поля на проводящих 3D-объектах.

Г л а в а 7.

ИНДУКТИВНАЯ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКА ПРИ ИЗУЧЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СРЕД

7.1 Электромагнитные поля индуктивных источников для полупространства

К источникам индуктивного типа следует относить плоскую электромагнитную волну магнитосферной и ионосферной природы, распространяющуюся по направлению, близкому к нормали к границе раздела двух сред с различными удельными электропроводностями «земля-воздух», магнитный диполь и замкнутый контур (квадратный или реже круговой), питаемый гармоническим током.

Плоская электромагнитная волна

Поле плоской волны является объектом изучения в методе магнитотеллурического зондирования, применяемом при исследованиях геоэлектрического строения неоднородного проводящего полупространства [Бердичевский, 2009; Жданов, 2012; Спичак, 1999]. По причине нестабильности величины электромагнитного поля во времени для практических целей интерпретации материалов исследований используют относительную характеристику поля, называемую тензором импеданса, главной диагональю которого являются соотношения

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y};\ Z_{yx} = -\frac{E_y}{H_x}.$$

МТ-поле состоит из двух независимых частей, называемых модами: первая мода ТЕ содержит компоненты E_x и H_y, а вторая - ТН компоненты E_y и H_x.

В простейшем случае однородного полупространства импеданс на границе сред $z = 0$ равен $Z = j\omega\mu_0 / k = k / \sigma$, где $k = \sqrt{j\omega\mu_0\sigma}$ - волновое число проводящего полупространства.

Используя это соотношение, для выбранной моды (например, ТЕ) при заданных значениях ω и σ, соотношения между величинами E_x и H_y определяются как $E_X = Z \cdot H_y$ или $H_y = \frac{E_X}{Z}$. Отличия в использовании данных формул заключаются в выборе компоненты, относительно которой определяются сдвиги фаз в другой компоненте поля. Для расчета поля на необходимой глубине z следует использовать зависимость затухания гармонического электромагнитного поля при его распространении в проводящей среде

$E_X\ z = E_X \cdot \exp\ -kz$ и $H_y\ z = H_y \cdot \exp\ -kz$ для ТЕ моды и

$E_y\ z = E_y \cdot \exp\ -kz$ и $H_X\ z = H_X \cdot \exp\ -kz$ для ТН моды.

Магнитный диполь

Если магнитный диполь с моментом $M_z^* = JS$, направленным по оси z, ортогональной границе двух полупространств при $z = 0$ с различными удельными электрическими сопротивлениями, погружен на глубину $h \le 0$ в среду с удельной электропроводностью σ_1, то вектор-потенциал в каждой из сред имеет одну составляющую вида [Бурсиан, 1972; Вешев, 1980; Гасаненко, 1959]

$$A_{z0}^* = -j\omega\mu_0 \frac{M_z^*}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2\lambda}{m_1 + m_0} \mathrm{e}^{-m_0 z + m_1 h} J_0(\lambda r) d\lambda, \qquad z \ge 0, \qquad (7.1)$$

$$A_{z1}^* = -j\omega\mu_0 \frac{M_z^*}{4\pi} \left(\frac{\mathrm{e}^{-k_1 R}}{R} + \int_0^\infty \frac{m_1 - m_0}{m_1 + m_0} \mathrm{e}^{m_1 (z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda \right), z \le 0, \qquad (7.2)$$

где $m_i = \sqrt{\lambda^2 + k_i^2}$.

Составляющие напряженностей поля определяются по формулам связи

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} rot\, rot\boldsymbol{A}^*,\ \boldsymbol{E} = rot\boldsymbol{A}^*.$$

Частные случаи этой задачи ($\sigma_0 = 0$ или $\sigma_1 = 0$) позволяют рассматривать электромагнитное поле в любой из сред, создаваемое магнитным диполем, находящимся в непроводящей среде (например, в воздухе - моделируя воздушный дипольный источник поля), а так же помещенный на границу двух полупространств или погруженный в проводящую среду.

Представление поля в виде вектор-потенциалов для двух сред позволяет рассчитывать поле с различными положениями источников и точек наблюдений. Например, для воздушных измерений методом электромагнитного профилирования с буксируемым в воздухе источником в виде магнитного диполя следует использовать формулу $z \geq 0$ при удельной электропроводности среды $\sigma_1 = 0$. Если диполь и точки наблюдений находятся на границе сред или погружены в нижнее полупространство $h \leq 0$, $z \leq 0$, то для расчета электрического и магнитного поля можно использовать любое из выражений. В последнем случае составляющие поля выражаются через элементарные и специальные функции с помощью интегралов Зоммерфельда и Фостера [Бурсиан, 1972; Заборовский, 1960].

Для малоглубинных индукционных исследований проводящих свойств полупространства при инженерных или археологических изысканиях применяется установка с горизонтальным магнитным диполем и измерениями электромагнитного поля в осевом и экваториальном направлении положения точки измерений относительно направления момента диполя.

Замкнутый контур с гармоническим током

Величины электрического и магнитного поля индуктивных источников в виде магнитного диполя или кольцевого контура определяются с помощью вектор–потенциала электрического типа путем интегрирования по замкнутой линейной системе токов источника [Смайт, 1954]

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \oint d\boldsymbol{A} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{e^{-kR}}{R} d\boldsymbol{l},$$

где $k = \sqrt{j\omega\mu_o\sigma}$ - волновое число среды.

Для замкнутого контура малого радиуса в виде комбинации линейных отрезков *dl* с током *I*, вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ имеет лишь одну составляющую, совпадающую с направлением тока в элементарном отрезке. Для рассматриваемого квазистационарного случая следует учитывать изменение фазы поля только на расстоянии от точки наблюдений до центра витка ввиду его малости. Выполняя интегрирование в системе координат с началом в центре витка для случая малого радиуса получим [Смайт, 1954; Никольский, 1989]

$$A_\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{IS\, e^{-kR}}{4\pi}\left(-\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{R}\right) = rot_\varphi A_z^*.$$

Отсюда следует, что вектор-потенциал для магнитного диполя (контура малого радиуса) можно выразить через еще более простой вектор

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} rot\boldsymbol{A}^*.$$

Из формулы связи напряженности электрического поля с вектор-потенциалом электрического типа $\boldsymbol{A}$ имеем [Бурсиан, 1972; Заборовский, 1960, Краев, 1965]

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sigma} grad\ div\, \boldsymbol{A} - j\omega\mu_o \boldsymbol{A}$$

откуда получим для источника в виде замкнутого контура или магнитного диполя

$$\boldsymbol{E} = -j\omega\mu_o \boldsymbol{A} = -j\omega\mu_o \frac{Ie^{-kR}}{4\pi} \oint \frac{d\boldsymbol{l}}{R},$$

поскольку индуктивный источник не имеет гальванической связи со средой и не создает токов проводимости, т.е. не имеет потенциальной части и $grad\ div\, \boldsymbol{A} = 0$. Для напряженности магнитного поля формула связи имеет вид $\boldsymbol{H} = rot\boldsymbol{A}$.

Зависимость от электропроводности окружающего пространства электрического и магнитного полей, возбуждаемых индуктивным способом (магнитный диполь или ток в замкнутом контуре), имеет существенное отличие от полей, возбуждаемых кондуктивным способом (заземленная линия или электрический диполь).

Для электрического поля эта особенность выражается в том, что в квазистатическом случае оно полностью не зависит от проводящих свойств вмещающей среды, а определяется только расстоянием и частотой тока в источнике и описывается чисто мнимой квадратурой *Im*, сдвинутой по фазе относительно тока в источнике на угол - π/2. В квазистационарном случае зависимость поля от электропроводности среды проявляется в том, что с ростом частоты тока появляется вещественная часть поля *Re*, совпадающая по фазе с током источника.

Аналогичная зависимость поля наблюдается для источника в виде кольцевого контура радиуса r_k , поскольку магнитный диполь является предельным случаем контура малого радиуса [Косенков, 1963; Светов, 1973]

$$E_\varphi = rot_\varphi A_z^*;\ \boldsymbol{A}^* = -j\omega\mu_o \frac{IS\boldsymbol{n}}{4\pi}\frac{e^{-kR}}{R} = -j\omega\mu_o \frac{Ir_k\boldsymbol{n}}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-mz}}{m} J_o(\lambda r_k) J_o(\lambda r) d\lambda \Big|_{r_k \to 0}$$

где использован интеграл Зоммерфельда и предел

$$J_o(\lambda r_k)\big|_{r_k \to 0} = \frac{\lambda r_k}{2};\ m^2 = \lambda^2 + k^2;$$

J_0 – функция Бесселя; $S = \pi r_k^2$ – площадь витка малого радиуса.

Магнитное поле в экваториальной плоскости магнитного диполя или вне замкнутого витка в стационарном случае в соответствии с законом Био-Савара не зависит от электропроводности среды и является чисто вещественной квадратурой *Re*, совпадающей по фазе с током источника, и имеет одну составляющую, направленную по нормали к плоскости диполя или контура. С ростом частоты тока в источнике зависимость поля от электропроводности

среды проявляется в том, что появляется мнимая квадратура *Im*, сдвинутая по фазе относительно тока в источнике на угол - π/2. Электрическое ReE_{φ} и магнитное ImB_z поля магнитного диполя имеют зависимость от проводящих свойств вмещающей среды одного порядка.

При индукционных зондированиях проводящего полупространства электромагнитное поле, создаваемое гармоническим током в незаземленном контуре, является суперпозицией полей токов прямолинейных отрезков, расположенных на границе сред. В свою очередь, поле тока каждой незаземленной стороны определяется интегрированием по длине от элементарного электрического диполя, момент которого направлен вдоль тока. Направляя горизонтальные оси поворотом и переносом системы координат последовательно вдоль каждой стороны контура, электромагнитное поле будет определяться с помощью суперпозиции поля одного электрического диполя, ориентированного вдоль одной из сторон контура [Вешев, 1967].

Поместим электрический диполь с моментом, направленным по оси *X*, под границу раздела сред в проводящую среду на глубину $0 > h \rightarrow 0$. Определение величин поля для точек, расположенных в верхнем или нижнем полупространстве, выполняется с помощью вектор-потенциала электрического типа $\boldsymbol{A}$ для частного случая, когда верхнее полупространство является изолятором (воздух).

Из ранее опубликованных работ [Бурсиан, 1972; Заборовский, 1960, Краев, 1965] известно, что электрический вектор-потенциал горизонтального заземленного электрического диполя, ориентированного по оси *X* вдоль контакта двух полупространств, имеет две составляющие – вдоль момента диполя A_x и по нормали к границе сред A_z. При этом суперпозиция полей от элементарных электрических диполей по каждой из сторон незаземленного замкнутого контура имеет несколько особенностей.

Первая состоит в том, что электрический диполь в виде антенного излучателя (диполь с незаземлёнными концами – в отличие от геофизической за-

дачи с заземленным диполем) имеет отличную от нуля (в каждой из сред) только составляющую вектор – потенциала, направленную по току A_x, поскольку составляющая A_z отражает влияние заземленных концов электрического диполя [Вешев, 1980].

Второй особенностью отличия напряженности электрического поля, создаваемого незаземленным диполем от поля заземленного диполя, является его чисто индукционный характер, поскольку в среде гальванические токи проводимости не возникают, что отмечалось выше.

Для составляющей вектор-потенциала A_x, направляемой вдоль элементарного диполя имеем для напряженностей электрического и магнитного поля

$$E_x = -j\omega\mu_o A_x,\ H_y = \frac{\partial}{\partial z} A_x,\ H_z = -\frac{\partial}{\partial y} A_x.$$

Еще одной особенностью являются различные граничные условия для вектор – потенциала в случае незаземленного или заземленного электрического диполя, ввиду отсутствия в электрическом поле потенциальной части, что отмечалось выше [Бурсиан, 1972; Вешев, 1980]. Для составляющей вектор-потенциала A_x граничные условия имеют вид

$$A_{x0} = A_{x1} \text{ и } \frac{\partial}{\partial z} A_{x0} = \frac{\partial}{\partial z} A_{x1}.$$

Используя известные выражения составляющей вектор-потенциала A_x, погруженного на глубину $h \le 0$ горизонтального электрического диполя, с моментом вдоль оси X, получим после преобразований для частного случая, когда верхнее полупространство является изолятором (воздух) и $m_0 = \lambda$, $m_1 = m$ [Заборовский, 1960, Краев, 1965]

$$A_{x0} = \frac{Idl}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{m+\lambda} e^{mh-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda, \qquad z \ge 0 \qquad (7.3)$$

$$A_{x1}=\frac{Idl}{4\pi}\left(\frac{e^{-k_1R}}{R}+\int_0^{\infty}\frac{\lambda}{m}\frac{m-\lambda}{m+\lambda}e^{m(z+h)}J_0(\lambda r)d\lambda\right),\qquad z\le 0\qquad(7.4)$$

где можно положить, что контур расположен на границе «земля-воздух» h=0.

Для одной стороны контура для точек z ≤ 0 составляющие напряженностей электрического и магнитного поля путем поворота системы координат вдоль стороны контура определяется как

$$E_x^{'}=-j\omega\mu_o\int_0^{x_x^{'}}A_x^{'}d\xi,\qquad H_y^{'}=\int_0^{x_x^{'}}\frac{\partial}{\partial z}A_x^{'}d\xi,\quad H_z=-\int_0^{x_x^{'}}\frac{\partial}{\partial y^{'}}A_x^{'}d\xi.$$

Поле тока в замкнутом контуре определяется суперпозицией составляющих с учетом последовательного поворота системы координат вдоль каждой стороны.

$$E_x=\sum_{i=1}^{4}\cos\alpha_i E_x^{'};\ E_y=\sum_{i=1}^{4}\sin\alpha_i E_x^{'};$$

$$H_x=\sum_{i=1}^{4}\sin\alpha_i H_y^{'};\ H_y=\sum_{i=1}^{4}\cos\alpha_i H_y^{'};\ H_z=\sum_{i=1}^{4}H_z^{'}.$$

Расчетные формулы для электрического поля примут вид (z → 0)

$$\begin{cases}E_x=-j\omega\mu_o\dfrac{I}{2\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\sin\alpha_i\int_0^{x_i^{'}}\int_0^{\infty}\frac{\lambda}{m+\lambda}e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)d\lambda d\xi;\\ E_y=-j\omega\mu_o\dfrac{I}{2\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\cos\alpha_i\int_0^{x_i^{'}}\int_0^{\infty}\frac{\lambda}{m+\lambda}e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)d\lambda d\xi.\end{cases}\qquad(7.5)$$

Магнитное поле на границе сред и в нижнем полупространстве (z ≤ 0)

$$\begin{cases}H_x=-\dfrac{I}{4\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\sin\alpha_i\int_0^{x_i^{'}}\left\{z\frac{1+kR}{R^3}e^{-kR}-\int_0^{\infty}\lambda\frac{m-\lambda}{m+\lambda}e^{mz}J_0(\lambda r)d\lambda\right\}d\xi;\\ H_y=-\dfrac{I}{4\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\cos\alpha_i\int_0^{x_i^{'}}\left\{z\frac{1+kR}{R^3}e^{-kR}-\int_0^{\infty}\lambda\frac{m-\lambda}{m+\lambda}e^{mz}J_0(\lambda r)d\lambda\right\}d\xi;\\ H_z=\dfrac{I}{4\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\int_0^{x_i^{'}}\left\{y_i^{'}\frac{1+kR}{R^3}e^{-kR}+\frac{y_i^{'}}{r}\int_0^{\infty}\frac{\lambda^2}{m}\frac{m-\lambda}{m+\lambda}e^{mz}J_1(\lambda r)d\lambda\right\}d\xi.\end{cases}\qquad(7.6)$$

Существенным отличием случая полупространства от безграничной среды магнитного поля переменного тока источника в экваториальной плоскости контура является наличие второй составляющей поля - H_y, которая обусловлена распределением индукционных токов, возникающих только в проводящем полупространстве. При этом величина составляющей H_y прямо пропорциональна величине электропроводности среды.

Влияние формы замкнутого тока (круговая петля или квадрат) на электромагнитное поле не является существенным и влияет лишь на величины поля в точках наблюдений вблизи углов контура.

Результаты расчетов поля

На рис. 38 приведены планы изолиний модулей напряженности электрического поля $|\boldsymbol{E}|$, мкВ/м, (слева) и магнитной индукции $|\boldsymbol{B}|$, пТл, (справа) в нижнем полупространстве, создаваемые током в незаземленной петле со размерами сторон 200 м на частотах f = 0.1; 1 и 5 кГц при удельном электрическом сопротивлении полупространства ρ_o = 200 Ом·м.

С повышением рабочей частоты тока источника до 1 кГц заметные изменения форм изолиний модулей $|\boldsymbol{E}|$ и $|\boldsymbol{B}|$ происходят лишь в удаленных точках на большой глубине. Электрическое поле с увеличением частоты до 1 кГц растет практически пропорционально частоте, а магнитное поле близко к полю постоянного тока. С увеличением частоты до 5 кГц поля существенно не изменяются и незначительно убывают по амплитуде в точках, удаленных от источника.

Для определения зависимостей величин магнитного и электрического поля от частоты в широком диапазоне изменений проведены расчеты поля в фиксированных точках, погруженных на некоторую глубину Z при фиксированной величине удельного электрического сопротивления полупространства. На рис. 39 приведены частотные кривые модулей напряженностей полей в нижнем полупространстве, создаваемые током в незаземленной петле со стороной a = 200 м для удельного сопротивления ρ_o = 200 Ом·м.

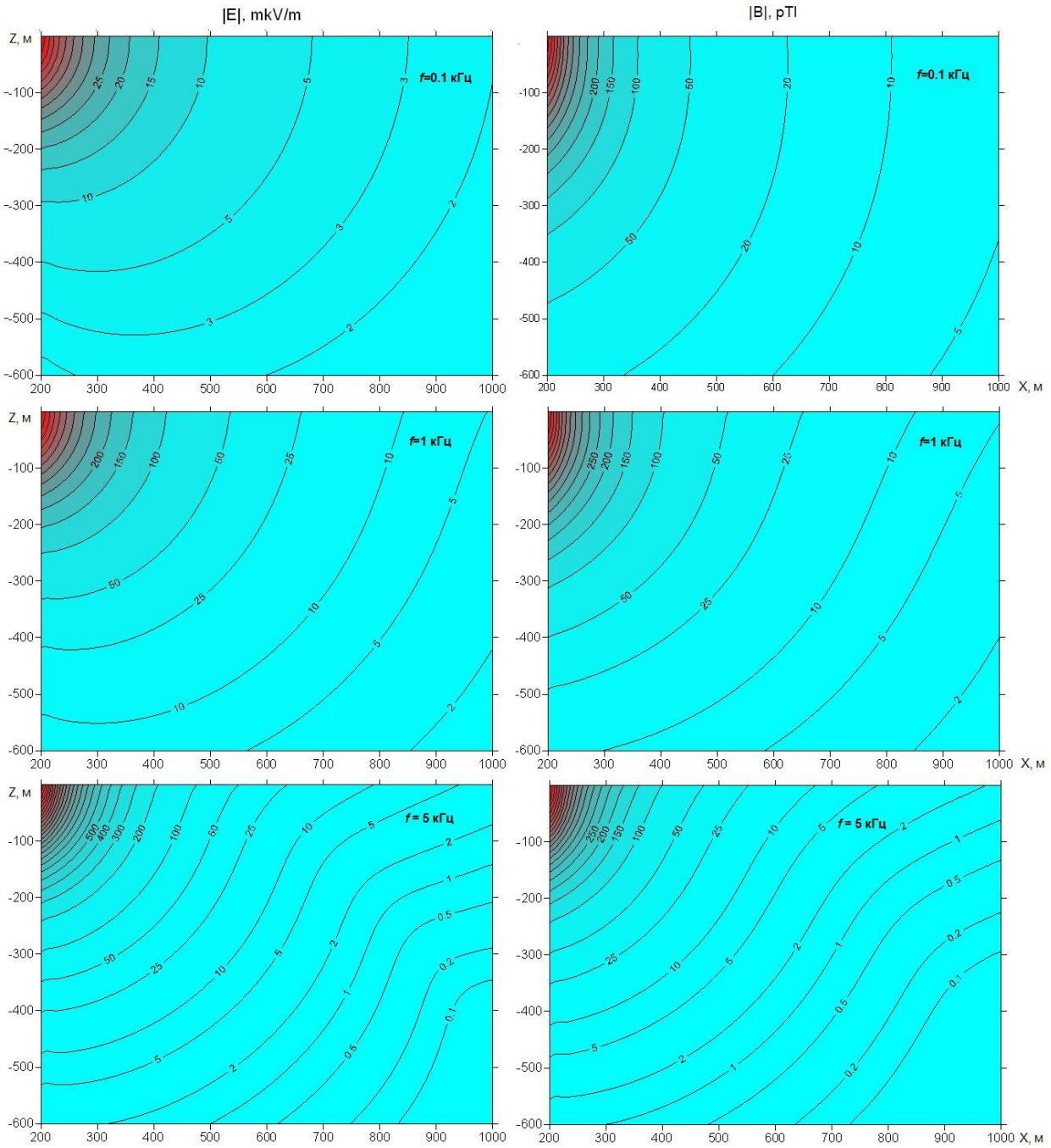


Рис. 38. Планы изолиний модулей напряженности электрического поля $|\boldsymbol{E}|$, мкВ/м, (слева) и магнитной индукции $|\boldsymbol{B}|$, пТл, (справа) в нижнем полупространстве, создаваемые током в незаземленной петле на частотах $f = 0.1$; 1 и 5 кГц

Поскольку появление вихревых индукционных токов в соответствии с законом Фарадея происходит пропорционально изменению магнитной индукции, частотные графики модуля магнитного поля (рис. 39) построены для модуля магнитной индукции $|\boldsymbol{B}|$ умноженного на частоту f.

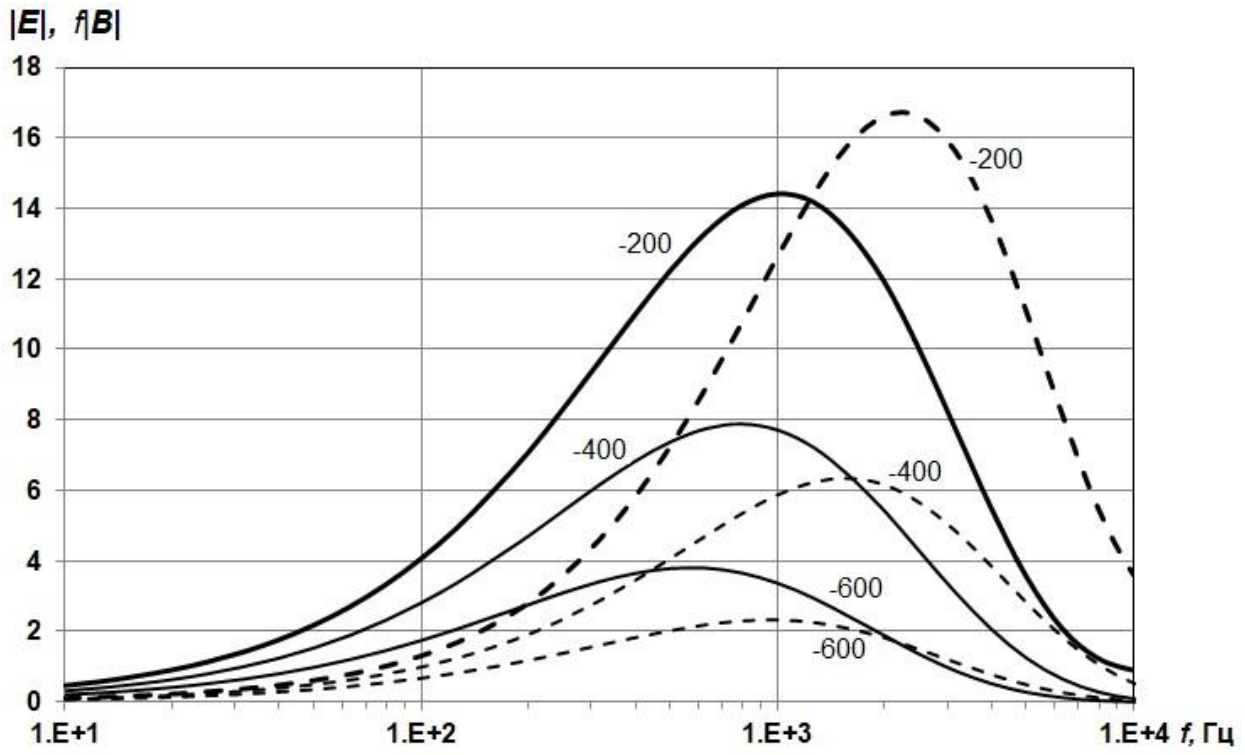


Рис. 39. Частотные кривые модуля напряженности электрического поля $|\boldsymbol{E}|$, мкВ/м, (сплошные) и величины $f\cdot|\boldsymbol{B}|$, нТл/с, (штриховые) в точках Y=0 м, X=700 м. Шифр кривых глубина Z (м), ρ_o=200 Ом·м.

Как видно на частотных кривых модулей электромагнитного поля, приведенных на рис. 39, кривые как электрического, так и магнитного поля имеют экстремальное значение на некоторой частоте в зависимости от пространственного положения точки наблюдений. При этом изменение величин $|\boldsymbol{E}|$ и $f\cdot|\boldsymbol{B}|$ с ростом частоты происходит аналогично как в верхней, так и в нижней части разреза.

Оптимальная частота при заданном удельном сопротивлении полупространства, соответствующая экстремуму электрического поля, изменяется несущественно: с величины f = 1,0 кГц для точки на глубине Z = -200 м до f = 0.5 кГц для Z= -600 м.

Изменение величины $f\cdot|\boldsymbol{B}|$ с ростом частоты происходит аналогично изменению электрического поля $|\boldsymbol{E}|$ для всех точек разреза. При этом оптимальная частота величины $f\cdot|\boldsymbol{B}|$, соответствующая экстремуму, изменяется от f = 2 кГц для глубины Z = -200 м до f = 1 кГц для глубины Z = -600 м.

Уменьшение удельного сопротивления вмещающей среды приводит к

кратному уменьшению оптимальной частоты как для модуля электрического поля $|\boldsymbol{E}|$, так и для величины $f\cdot|\boldsymbol{B}|$.

Еще одной важной характеристикой электромагнитного поля источников индуктивного типа является зависимость величин амплитуд электрического и магнитного поля от удельного электрического сопротивления.

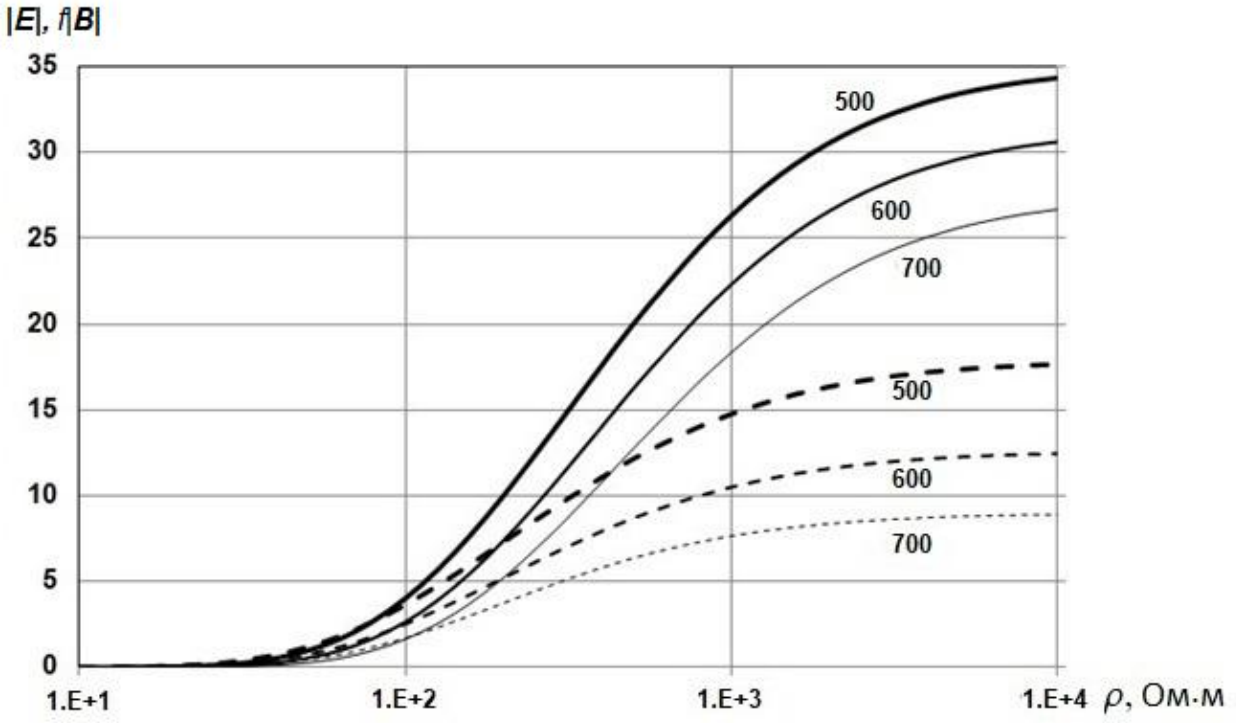


Рис. 40. Зависимость модуля напряженности электрического $|\boldsymbol{E}|$, мкВ/м, (сплошные линии) и величины $f\cdot|\boldsymbol{B}|$, Тл/с, (штриховые линии) от удельного электрического сопротивления ρ, Ом·м, на частоте f = 1 кГц в точках на глубине Z = -500 м. Шифр кривых – расстояние от центра петли X, м.

На рис. 40 приведены расчеты величин модуля $|\boldsymbol{E}|$ (сплошные линии) и произведения $f\cdot|\boldsymbol{B}|$ (штриховые линии) в точках нижнего полупространства, удаленных от центра контура на расстояние X (шифр кривых) в зависимости от величины удельного электрического сопротивления полупространства на частоте тока f = 1 кГц в квадратном контуре с размером сторон 200 м на глубине Z=-500 м при Y = 0 м.

Как следует из приведенного выше анализа физических зависимостей электромагнитного поля индукционного источника, при низких величинах электропроводности полупространства электрическое поле определяется

только величиной момента источника и его расстоянием от источника до точки наблюдений, что соответствует квазистатическому полю. С увеличением электропроводности модуль электрического поля $|\boldsymbol{E}|$ плавно убывает, стремясь к величинам, определяемым волновой зоной и токами смещения в среде, которые в данном квазистационарном случае не учитываются. В этом заключается особенность электрического поля индуктивного источника поля от поля гальванического источника, что подчеркивалось в начале статьи, поскольку для последнего зависимость от удельной электропроводности среды является прямой.

Аналогичная зависимость наблюдается для величины $f\cdot|\boldsymbol{B}|$, описывающей изменение модуля магнитного поля, поскольку частота тока в источнике является постоянной и входит множителем в произведение $f\cdot|\boldsymbol{B}|$. Модуль магнитного поля с увеличением электропроводности плавно убывает от величины поля постоянного тока, не зависящей от электропроводности и определяемой по закону Био-Савара, до величин, определяемым волновой зоной и токами смещения, поскольку магнитное поле любого источника слабо зависит от электропроводности среды.

Еще одной важной характеристикой распределения электромагнитного поля является соотношение между токами проводимости и токами индукции, возбуждаемыми в проводящем полупространстве за счет явления индукции. Явного выражения для индукционной напряженности электрического поля не существует, поскольку она записывается в дифференциальном или интегральном виде закона Фарадея вследствие ее замкнутого вихревого характера [Смайт, 1954; Бурсиан, 1972; Никольский, 1989]

$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \text{ или } \oint E_l dl = -\frac{d}{dt}\int_S B_n dS\,.$$

Чтобы преодолеть это затруднение, воспользуемся выражениями для векторов поляризации электрического $\boldsymbol{P}_E$ и магнитного $\boldsymbol{P}_H$ типов, возникающих в центре элементарного проводящего объема среды

$$\boldsymbol{P}_E = I^t d\boldsymbol{l} = \sigma \boldsymbol{E} \cdot dV \text{ и } \boldsymbol{P}_M = I^i dS\boldsymbol{n} = -j\omega\sigma \boldsymbol{B} \cdot dS \cdot cdV,$$

где: dS - сечение малого объема dV в направлении вектора магнитного поля, c – *const*.

Для единичного объема среды с точностью до несущественного постоянного слагаемого d, размерностью м$^{-1}$, соотношение между токами проводимости и индукции равно

$$\frac{I^t}{I^i} \approx d \frac{|\boldsymbol{E}|}{f|\boldsymbol{B}|}.$$

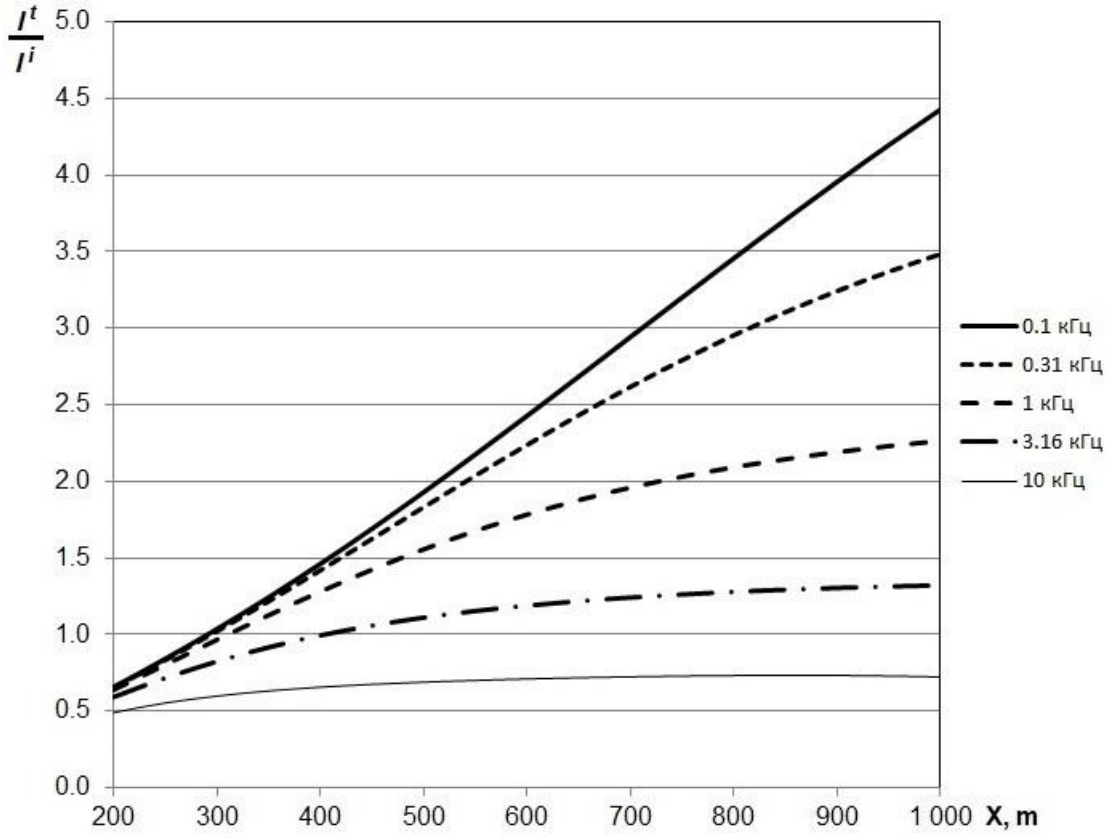


Рис. 41. Зависимость отношения токов проводимости и индукции I^t / I^i для профиля, находящегося на глубине Z = -500 м на расстоянии от центра петли на ряде частот f = 0.1 ÷ 10 кГц (шифр кривых).

На рис. 41 приведены графики расчета отношения токов I^t / I^i для профиля, находящегося на глубине Z = -500 м для ряда частот f от 0.1 до10 кГц.

Как следует из рис. 41, на низких частотах зависимость соотношения токов проводимости к токам индукции I^t / I^i с удалением от источника существенно превосходит это отношение, чем на высоких. Это связано с тем об-

стоятельством, что электрическое поле индукционного типа убывает с удалением от источника на порядок медленнее, чем магнитное поле.

С повышением частоты, которая является множителем величины $f\cdot|\boldsymbol{B}|$, соотношение токов становится существенно меньше и при некоторой частоте величины токов сравниваются, что заметно на выполаживающихся ветвях кривых I^t / I^i.

Выводы

- В квазистатическом случае как электрическое, так и магнитное поля индукционного источника в виде магнитного диполя или тока в замкнутом контуре не зависят от проводящих свойств вмещающей среды, а определяется только расстоянием от индукционного источника поля до точки наблюдений и частотой тока.
- С ростом частоты тока в источнике изменение величины модуля электрического поля $|\boldsymbol{E}|$ и изменения магнитной индукции во времени $f\cdot|\boldsymbol{B}|$ происходит адекватно как в верхней, так и в нижней части полупространства и имеют экстремальную величину, определяемую расстоянием до источника.
- Оптимальная частота, соответствующая экстремумам поля, в удаленных от источника точках наблюдений практически не зависит от проводящих свойств разреза.
- Соотношения возникающих в среде токов проводимости к токам индукции I^t / I^i существенно зависят от используемой частоты тока и удаления точек наблюдений до источника.

7.2 Тензорная функция Грина для полупространства

Рассмотренные в предыдущей главе примеры рассеяния гармонического электромагнитного поля на 3D-объектах относятся к безграничной однородной вмещающей среде. Особенностью полученного решения задачи рассеяния гармонического электромагнитного поля в виде уравнения (4.18) через

аномальные моменты вторичных электрических и магнитных диполей, возникающих в центрах элементарных объемов, позволяет легко распространить его на случаи полупространства или N-слойной среды. Для изучения поля при наличии двух сред, когда одна из них является непроводящей (воздух), необходимо использование решений для поля электрических и магнитных диполей, погруженных в проводящее полупространство, координатные части полей которых являются компонентами тензорных функций Грина.

Из определений для тензорных функций Грина G_{mn}, W_{mn}, $\hat{G}_{mn}$ и $\hat{W}_{mn}$ в формулах (4.3), (4.5), (4.16), (4.17) следует, что они являются напряженностями электрического и магнитного полей вторичных электрического и магнитного дипольных источников с единичным моментом. Симметричный вид тензорных функций Грина в безграничной среде объясняется тем, что координатные части напряженности электрического и магнитного поля электрического диполя тождественно равны координатным частям напряженности соответственно магнитного и электрического поля магнитного диполя [Бурсиан, 1972; Вешев, 1980; Заборовский, 1960]. В случае двух полупространств с различными проводящими свойствами симметрия электромагнитного поля нарушается, а в случае одного непроводящего полупространства (воздух) токи проводимости в нем вовсе отсутствуют.

В случае, когда проводящий 3D объект находится в нижнем ($z < 0$) проводящем полупространстве, учет электрических свойств полупространств для тензорных функций Грина выполняется по тем же формулам связи с помощью вектор–потенциалов электрического и магнитного типа $d\boldsymbol{A}$ и $d\boldsymbol{A}^*$, полученных для верхнего и нижнего полупространств путем сопряжения полей на границе раздела сред с различными свойствами.

Для немагнитных сред условия на границах сред с различной электропроводностью заключаются в непрерывности всех составляющих напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}^o = \boldsymbol{H}^1$, непрерывности составляющих электрического поля, параллельных границе раздела сред $E_t^o = E_t^1$ и $E_\tau^o = E_\tau^1$, а также

непрерывности составляющей плотности тока, направленной по нормали к границе раздела $i_n^o = i_n^1$ [Альпин, 1975; Кудрявцев, 1988].

Используя формулы связи составляющих напряженностей поля с вектор-потенциалами электрического и магнитного типа

$$\boldsymbol{H} = rotd\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E} = \frac{1}{\sigma_0}\left(grad\ div\, d\boldsymbol{A} - k_0^2 d\boldsymbol{A}\right),\ \boldsymbol{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} rot\ rotd\boldsymbol{A}^*,\ \boldsymbol{E} = rotd\boldsymbol{A}^*$$

условия на границе раздела сред с различной электропроводностью $z = const$ для вектор-потенциалов в прямоугольных декартовых координатах имеют вид, (номера сред соответствуют 0 – «воздух» z > 0, 1- «земля» z < 0)

$$dA_x^o = dA_x^1, \qquad dA_y^o = dA_y^1, \qquad dA_z^o = dA_z^1,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} dA_x^o = \frac{\partial}{\partial z} dA_x^1, \quad \frac{\partial}{\partial z} dA_y^o = \frac{\partial}{\partial z} dA_y^1, \quad \frac{1}{\sigma_o} divd\boldsymbol{A}^o = \frac{1}{\sigma_1} divd\boldsymbol{A}^1,$$

$$\sigma_o dA_x^{*o} = \sigma_1 dA_x^{*1}, \quad \sigma_o dA_y^{*o} = \sigma_1 dA_y^{*1}, \quad dA_z^{*o} = dA_z^{*1},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} dA_x^{*o} = \frac{\partial}{\partial z} dA_x^{*1}, \quad \frac{\partial}{\partial z} dA_y^{*o} = \frac{\partial}{\partial z} dA_y^{*1}, \quad divd\boldsymbol{A}^{*o} = divd\boldsymbol{A}^{*1}.$$

Подробный порядок получения выражений для составляющих вектор–потенциалов электрического и магнитного типа $d\boldsymbol{A}$ и $d\boldsymbol{A}^*$ приводятся в многочисленной литературе, например [Бурсиан, 1972; Вешев, 1980; Заборовский, 1960]. Приведем окончательные выражения для вектор-потенциалов.

Для координатных частей составляющих вектор-потенциала электрического типа $d\boldsymbol{A}$ для случая, когда верхнее полупространство является изолятором (воздух), для точек, расположенных в нижнем полупространстве с электропроводностью σ и на границе сред z ≤ 0 с координатой диполя ζ < 0

$$\begin{cases} dA_{xx} = P - \overline{P} + \int\limits_0^\infty \alpha \cdot e^{m\bar{z}} J_o d\lambda; & dA_{xy} = 0; & dA_{xz} = 0; \\ dA_{yx} = 0; & dA_{yy} = dA_{xx}; & dA_{yz} = 0; \\ dA_{zx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^\infty \beta \cdot e^{m\bar{z}} J_o d\lambda; & dA_{zy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^\infty \beta \cdot e^{m\bar{z}} J_o d\lambda; & dA_{zz} = P - \overline{P}; \end{cases} \qquad (7.7)$$

где $\alpha = \dfrac{2\lambda}{m+\lambda}$; $\beta = \dfrac{2}{m+\lambda}$; $m = \sqrt{\lambda^2 + k^2}$; $P = e^{-kR} / R$; $\overline{P} = e^{-k\overline{R}} / \overline{R}$;

$$\overline{z} = z + \zeta;\ \rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2};\ \overline{R} = \sqrt{\rho^2 + \overline{z}^2};\ R = \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2};$$

J_o – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, аргумент $\lambda\rho$ для сокращения записи всюду опущен. Поскольку верхнее полупространство непроводящее ($k_0 = 0$), индекс 1 для нижнего полупространства опущен. Первый индекс вектор-потенциала показывает его составляющую, а второй – ориентировку момента электрического диполя $\dfrac{\boldsymbol{M}_E}{4\pi}$, который для сокращения записи всюду опущен. Переход к компонентам тензоров G_{mn} и W_{mn} проводится по формулам (4.3) и (4.5).

Для координатных частей составляющих вектор-потенциала магнитного типа $d\boldsymbol{A}^*$ для точек, расположенных в нижнем полупространстве с электропроводностью σ и на границе сред $z \le 0$ с координатой диполя $\zeta < 0$

$$\begin{cases} dA^*_{xx} = P - \overline{P} = dA_{zz}; & dA^*_{xy} = 0; & dA^*_{xz} = 0; \\ dA^*_{yx} = 0; & dA^*_{yy} = P - \overline{P} = dA_{zz}; & dA^*_{yz} = 0; \\ dA^*_{zx} = dA_{zx}; & dA^*_{zy} = dA_{zy}; & dA^*_{zz} = dA_{xx}; \end{cases} \qquad (7.8)$$

где для сокращения записи всюду опущен множитель с моментом магнитного диполя $-j\omega\mu_o \dfrac{\boldsymbol{M}_H}{4\pi}$. Переход к компонентам тензоров $\hat{G}_{mn}$ и $\hat{W}_{mn}$ проводится по формулам (4.16) и (4.17).

При расчетах электромагнитного поля в верхнем непроводящем полупространстве и на границе сред $z \ge 0$ координатные части составляющих вектор-потенциала электрического типа $d\boldsymbol{A}$ имеют вид

$$\begin{cases} dA_{xx} = \int_0^\infty \alpha \cdot e^{-\lambda z + m\zeta} J_o d\lambda; & dA_{xy} = 0; & dA_{xz} = 0; \\ dA_{yx} = 0; & dA_{yy} = dA_{xx}; & dA_{yz} = 0; \\ dA_{zx} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \beta \cdot e^{-\lambda z + m\zeta} J_o d\lambda; & dA_{zy} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \beta \cdot e^{-\lambda z + m\zeta} J_o d\lambda; & dA_{zz} = 0. \end{cases} \quad (7.9)$$

Для вектор-потенциала магнитного типа $d\boldsymbol{A}^*$

$$\begin{cases} dA^*_{xx} = 2\int_0^\infty e^{-\lambda z + m\zeta} J_0 d\lambda,; & dA^*_{xy} = 0; & dA^*_{xz} = 0; \\ dA^*_{yx} = 0; & dA^*_{yy} = dA^*_{xx}; & dA^*_{yz} = 0; \\ dA^*_{zx} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \beta \cdot e^{-\lambda z + m\zeta} J_o d\lambda; & dA^*_{zy} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \beta \cdot e^{-\lambda z + m\zeta} J_o d\lambda; & dA^*_{zz} = \int_0^\infty \alpha \cdot\cdot e^{-\lambda z + m\zeta} J_o d\lambda. \end{cases} \quad (7.10)$$

Переход к компонентам тензоров $\hat{G}_{mn}$ и $\hat{W}_{mn}$ для расчета аномальных составляющих напряженностей магнитного поля в воздухе $\boldsymbol{H}^a$, проводится по формулам (4.5) и (4.9).

Расчетный вид компонентов тензора G_{mn}, соответствующих составляющим электрического поля (первый индекс) электрических диполей различной ориентировки моментов (второй индекс)

$$G_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(P - \bar{P}) - k^2(P - \bar{P}) + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{m\bar{z}} J_o d\lambda - 2k^2 \int_0^\infty \frac{\lambda e^{m\bar{z}}}{m + \lambda} J_o d\lambda;$$

$$G_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(P - \bar{P}) - k^2(P - \bar{P}) + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^\infty e^{m\bar{z}} J_o d\lambda - 2k^2 \int_0^\infty \frac{\lambda e^{m\bar{z}}}{m + \lambda} J_o d\lambda;$$

$$G_{yx} = G_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(P - \bar{P}) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int_0^\infty e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$G_{zx} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}(P - \bar{P}) + 2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty m e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$G_{zy} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}(P - \bar{P}) + 2\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty m e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$G_{xz} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(P - \bar{P});\ G_{yz} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(P - \bar{P});\ G_{zz} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(P - \bar{P}) - k^2(P - \bar{P}).$$

В частном случае при $\rho = 0$ $G_{xx} = G_{yy}$ и интегрирование сводится к несобственному интегралу, т.к. $\left.\frac{J_1(\lambda\rho)}{\rho}\right|_{\rho \to 0} = \frac{\lambda}{2}$, т.е. $\int_0^\infty \lambda^2 e^{m\bar{z}} d\lambda$. Остальные компоненты, кроме G_{zz}, равны нулю.

Расчетный вид компонентов тензора $\hat{G}_{mn}$, соответствующих составляющим магнитного поля (первый индекс) магнитных диполей различной ориентировки моментов (второй индекс)

$$\hat{G}_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(P - \bar{P}) - k^2(P - \bar{P}) + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty \frac{m}{m + \lambda} e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$\hat{G}_{yx} = \hat{G}_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(P - \bar{P}) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int_0^\infty \frac{m}{m + \lambda} e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$\hat{G}_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(P - \bar{P}) - k^2(P - \bar{P}) + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^\infty \frac{m}{m + \lambda} e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$\hat{G}_{zx} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}(P - \bar{P}) + 2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{m^2}{m + \lambda} e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$\hat{G}_{zy} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}(P - \bar{P}) + 2\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty \frac{m^2}{m + \lambda} e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$\hat{G}_{xz} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(P - \bar{P}) + 2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{\lambda m}{m + \lambda} e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$\hat{G}_{yz} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(P - \bar{P}) + 2\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty \frac{\lambda m}{m + \lambda} e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$\hat{G}_{zz} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(P - \bar{P}) - k^2(P - \bar{P}) + 2\int_0^\infty \frac{\lambda^3}{m + \lambda} e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda.$$

В частном случае при $\rho = 0$ $\hat{G}_{xx} = \hat{G}_{yy}$ и интегрирование сводится к не-

собственному интегралу вида $\int_0^\infty \frac{\lambda^2 m}{m+\lambda} e^{m\bar{z}} d\lambda$.

Расчетный вид компонентов тензора W_{mn}, соответствующих составляющим магнитного поля (первый индекс) электрических диполей различной ориентировки моментов (второй индекс)

$$W_{xx} = W_{yy} = 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int_0^\infty \frac{e^{m\bar{z}}}{m+\lambda} J_0 d\lambda;$$

$$W_{yx} = \frac{\partial}{\partial z}(P-\bar{P}) - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty \frac{e^{m\bar{z}}}{m+\lambda} J_0 d\lambda + 2\int_0^\infty \frac{\lambda m}{m+\lambda} e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$W_{xy} = -\frac{\partial}{\partial z}(P-\bar{P}) + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^\infty \frac{e^{m\bar{z}}}{m+\lambda} J_0 d\lambda - 2\int_0^\infty \frac{\lambda m}{m+\lambda} e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$W_{zx} = -\frac{\partial}{\partial y}(P-\bar{P}) - 2\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty \frac{\lambda}{m+\lambda} e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$W_{zy} = \frac{\partial}{\partial x}(P-\bar{P}) + 2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{\lambda}{m+\lambda} e^{m\bar{z}} J_0 d\lambda;$$

$$W_{xz} = \frac{\partial}{\partial y}(P-\bar{P});\ W_{yz} = -\frac{\partial}{\partial x}(P-\bar{P});\ W_{zz} = 0.$$

В частном случае при $\rho = 0$ ненулевыми являются компоненты $W_{xy} = -W_{yx}$ и интегрирование сводится к несобственному интегралу вида $\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{m+\lambda} e^{m\bar{z}} d\lambda$

Компоненты тензора $\hat{W}_{mn}$, соответствующие составляющим электрического поля (первый индекс) магнитных диполей различной ориентировки моментов (второй индекс)

$$\hat{W}_{yx} = \frac{\partial}{\partial z}(P-\bar{P}) - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty \frac{e^{m\bar{z}}}{m+\lambda} J_0 d\lambda;$$

$$\hat{W}_{xy} = -\frac{\partial}{\partial z}(P-\bar{P}) + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^\infty \frac{e^{m\bar{z}}}{m+\lambda} J_0 d\lambda;$$

$\hat{W}_{xx} = W_{xx}$; $\hat{W}_{yy} = W_{yy}$; $\hat{W}_{zx} = -W_{xz}$; $\hat{W}_{zy} = -W_{yz}$; $\hat{W}_{xz} = -W_{zx}$;

$\hat{W}_{yz} = -W_{zy}$; $\hat{W}_{zz} = 0$.

В частном случае при $\rho = 0$ ненулевыми являются компоненты $\hat{W}_{xy} = -\hat{W}_{yx}$ и интегрирование сводится к несобственному интегралу вида

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{m+\lambda} e^{m\bar{z}} d\lambda .$$

Отличия в поведении компонент тензоров $\hat{W}_{yx}$ и W_{xy}, а так же $\hat{W}_{xy}$ и W_{yx} объясняются различным поведением компонент магнитного и электрического поля на границе сред с различными электропроводностями.

Для расчета аномальных составляющих напряженностей магнитного поля в воздухе $\boldsymbol{H}^a$, создаваемых аномальными токами проводимости и индукции, расчетный вид компонентов тензора W_{mn}, соответствующих составляющим магнитного поля (первый индекс) электрических диполей различной ориентировки моментов (второй индекс)

$$W_{xx} = -W_{yy} = 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda z + m\varsigma}}{m+\lambda} J_0 d\lambda ;$$

$$W_{yx} = -2\int_0^\infty \frac{\lambda^2 e^{-\lambda z + m\varsigma}}{m+\lambda} J_0 d\lambda - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda z + m\varsigma}}{m+\lambda} J_0 d\lambda ;$$

$$W_{zx} = -2\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda z + m\varsigma}}{m+\lambda} J_0 d\lambda ;$$

$$W_{xy} = 2\int_0^\infty \frac{\lambda^2 e^{-\lambda z + m\varsigma}}{m+\lambda} J_0 d\lambda + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda z + m\varsigma}}{m+\lambda} J_0 d\lambda ;$$

$$W_{zy} = 2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda z + m\varsigma}}{m+\lambda} J_0 d\lambda ; \; W_{xz} = 0 ; \; W_{yz} = 0 ; \quad W_{zz} = 0 .$$

В частном случае при $\rho = 0$ ненулевыми являются компоненты $W_{yx} = -W_{xy}$ и интегрирование сводится к несобственному интегралу

$$W_{xy} = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 e^{-\lambda z + m\varsigma}}{m+\lambda} d\lambda .$$

Расчетный вид компонентов тензора $\hat{G}_{mn}$, соответствующих составляющим магнитного поля (первый индекс) магнитных диполей различной ориентировки моментов (второй индекс)

$$\hat{G}_{xx} = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{\infty} \frac{m}{m+\lambda} e^{-\lambda z + m\varsigma} J_0 d\lambda ;$$

$$\hat{G}_{yx} = \hat{G}_{xy} = 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int_0^{\infty} \frac{m}{m+\lambda} e^{-\lambda z + m\varsigma} J_0 d\lambda ;$$

$$\hat{G}_{xz} = 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\int_0^{\infty} \frac{\lambda}{m+\lambda} e^{-\lambda z + m\varsigma} J_0 d\lambda ;$$

$$\hat{G}_{yy} = 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^{\infty} \frac{m}{m+\lambda} e^{-\lambda z + m\varsigma} J_0 d\lambda ;$$

$$\hat{G}_{yz} = 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\int_0^{\infty} \frac{\lambda}{m+\lambda} e^{-\lambda z + m\varsigma} J_0 d\lambda ;$$

$$\hat{G}_{zx} = -\hat{G}_{xz} - 2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda z + m\varsigma} J_0 d\lambda ;$$

$$\hat{G}_{zy} = -\hat{G}_{yz} - 2\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda z + m\varsigma} J_0 d\lambda ;$$

$$\hat{G}_{zz} = 2\int_0^{\infty} \frac{\lambda^3}{m+\lambda} e^{-\lambda z + m\varsigma} J_0 d\lambda .$$

В частном случае при $\rho = 0$ ненулевыми являются компоненты $\hat{G}_{xx} = \hat{G}_{yy}$ и $\hat{G}_{zz}$, а интегрирование сводится к несобственным интегралам

$$\hat{G}_{xx} = -\int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 m}{m+\lambda} e^{-\lambda z + m\varsigma} d\lambda \text{ и } \hat{G}_{zz} = 2\int_0^{\infty} \frac{\lambda^3}{m+\lambda} e^{-\lambda z + m\varsigma} d\lambda .$$

Остальные компоненты равны нулю.

Существенного ускорения расчетов компонентов тензорных функций

при решении СЛАУ большой размерности можно добиться, взяв интегралы аналитически с помощью известного интеграла Фостера [Бурсиан, 1972; Заборовский, 1960]

$$Q = \int_0^\infty \frac{e^{m\bar{z}}}{m} J_o(\lambda\rho)\, d\lambda = I_0\left(\frac{k}{2}\left[\bar{R}+\bar{z}\right]\right) K_0\left(\frac{k}{2}\left[\bar{R}-\bar{z}\right]\right),\ \bar{z} = z+\zeta < 0.$$

Для координатных частей составляющих вектор-потенциала электрического типа $d\boldsymbol{A}$ (7.7) имеем

$$\begin{cases} dA_{xx} = P - \bar{P} + \dfrac{2}{k^2}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\bar{P} - \dfrac{2}{k^2}\dfrac{\partial^3}{\partial z^3}Q + 2\dfrac{\partial}{\partial z}Q; & dA_{xy} = 0; & dA_{xz} = 0; \\ dA_{yx} = 0; & dA_{yy} = dA_{xx}; & dA_{yz} = 0; \\ dA_{zx} = \dfrac{2}{k^2}\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}Q - \bar{P}\right); & dA_{zy} = \dfrac{2}{k^2}\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}Q - \bar{P}\right); & dA_{zz} = P - \bar{P}; \end{cases}$$

Расчетный вид компонентов тензора G_{mn}, соответствующих составляющим электрического поля (первый индекс) электрических диполей различной ориентировки моментов (второй индекс), принимает вид

$$G_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(P-\bar{P}) - k^2(P-\bar{P}) - 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\bar{P} - 2\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial z}Q;$$

$$G_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(P-\bar{P}) - k^2(P-\bar{P}) - 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\bar{P} - 2\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}Q;$$

$$G_{yx} = G_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(P-\bar{P}) + 2\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}Q;$$

$$G_{zx} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}(P-\bar{P}) + 2\frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2}Q; \quad G_{zy} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}(P-\bar{P}) + 2\frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2}Q;$$

$$G_{xz} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(P-\bar{P});\ G_{yz} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(P-\bar{P});\ G_{zz} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(P-\bar{P}) - k^2(P-\bar{P}).$$

Расчетный вид компонентов тензора W_{mn}, соответствующих составляющим магнитного поля (первый индекс) электрических диполей различной ориентировки моментов (второй индекс), проводится по формуле связи $W_{mn} = rot_m dA_n$

$$W_{xx} = W_{yy} = \frac{2}{k^2}\frac{\partial^4}{\partial x \partial y \partial z^2}Q - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\bar{P};$$

$$W_{zx} = -\frac{\partial}{\partial y}(P - \bar{P}) - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2}\bar{P} + \frac{2}{k^2}\frac{\partial^4}{\partial y \partial z^3}Q - 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}Q;$$

$$W_{zy} = \frac{\partial}{\partial x}(P - \bar{P}) + \frac{2}{k^2}\frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2}\bar{P} - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^4}{\partial x \partial z^3}Q + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}Q;$$

$$W_{xy} = -\frac{\partial}{\partial z}(P + \bar{P}) + \frac{2}{k^2}\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}\bar{P} - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2}Q;$$

$$W_{yx} = \frac{\partial}{\partial z}(P + \bar{P}) - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial z}\bar{P} + \frac{2}{k^2}\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2}Q;$$

$$W_{xz} = \frac{\partial}{\partial y}(P - \bar{P});\ W_{yz} = -\frac{\partial}{\partial x}(P - \bar{P});\ W_{zz} = 0.$$

Для координатных частей составляющих вектор-потенциала магнитного типа $d\boldsymbol{A}^*$ (7.8) имеем

$$dA^*_{xx} = P - \bar{P} = dA^*_{yy};\ dA^*_{zx} = \frac{2}{k^2}\frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2}Q - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\bar{P};$$

$$dA^*_{zy} = \frac{2}{k^2}\frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2}Q - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\bar{P};\ dA^*_{zz} = P - \bar{P} + \frac{2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\bar{P} - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^3}{\partial z^3}Q + 2\frac{\partial}{\partial z}Q.$$

Остальные компоненты равны нулю.

Расчетный вид компонентов тензора $\hat{W}_{mn}$, соответствующих составляющим электрического поля (первый индекс) магнитных диполей различной ориентировки моментов (второй индекс), получим, используя формулу связи $\hat{W}_{mn} = rot_m dA^*_n$

$$\hat{W}_{xx} = W_{xx};\ \hat{W}_{yy} = -W_{xx};\ \hat{W}_{xz} = -W_{zx};\ \hat{W}_{yz} = -W_{zy};\ \hat{W}_{zx} = -W_{xz};$$

$$\hat{W}_{zy} = -W_{yz};\hat{W}_{zz} = 0;\ \hat{W}_{yx} = W_{xy} + 2\frac{\partial}{\partial z}P;\ \hat{W}_{xy} = W_{yx} - 2\frac{\partial}{\partial z}P.$$

Расчетный вид компонентов тензора $\hat{G}_{mn}$ в аналитическом виде, соответствующих составляющим магнитного поля (первый индекс) магнитных диполей различной ориентировки моментов (второй индекс)

$$\hat{G}_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(P - \bar{P}) - k^2(P - \bar{P}) - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2}\bar{P} - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial z^3}Q;$$

$$\hat{G}_{yx} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(P - \bar{P}) - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^4}{\partial x \partial y \partial z^2}\bar{P} + \frac{2}{k^2}\frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y \partial z}Q;$$

$$\hat{G}_{xy} = \hat{G}_{yx};$$

$$\hat{G}_{zx} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}(P - \bar{P}) - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^4}{\partial x \partial z^3}\bar{P} + \frac{2}{k^2}\frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial z^2}Q;$$

$$\hat{G}_{zy} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}(P - \bar{P}) - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^4}{\partial y \partial z^3}\bar{P} + \frac{2}{k^2}\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial z^2}Q;$$

$$\hat{G}_{xz} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(P - \bar{P}) + \frac{2}{k^2}\frac{\partial^4}{\partial x \partial z^3}\bar{P} - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^5}{\partial x \partial z^4}Q + 2\frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2}Q;$$

$$\hat{G}_{yz} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(P - \bar{P}) + \frac{2}{k^2}\frac{\partial^4}{\partial y \partial z^3}\bar{P} - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^5}{\partial y \partial z^4}Q + 2\frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2}Q;$$

$$\hat{G}_{zz} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(P - \bar{P}) - k^2(P - \bar{P}) - 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\bar{P} + \frac{2}{k^2}\frac{\partial^4}{\partial z^4}\bar{P} - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^5}{\partial z^5}Q + 4\frac{\partial^3}{\partial z^3}Q - 2k^2\frac{\partial}{\partial z}Q.$$

Взятие частных производных первого и второго порядков от интеграла Фостера не вызывают особых затруднений. Частные производные третьего порядка приведены в учебной и научной литературе [Заборовский, 1960; Овчинников, 1979]:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}Q = \frac{k^2 z}{2R^4}\left(R^2 - 3x^2\right)I_0K_0 - \frac{k^3 x^2 z}{2R^3}I_0K_1 + \frac{k^2}{2R^5}(R + z)\left(R^2 - 3x^2\right)I_0K_1 +$$

$$+\frac{k^3 x^2 z}{2R^3}I_1K_0 + \frac{k^2}{2R^5}(R - z)\left(R^2 - 3x^2\right)I_1K_0 + \frac{k^2 z}{2R^4}\left[\frac{2R^2x^2}{r^2} - \left(R^2 - 3x^2\right)\right]I_1K_1,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}Q = -\frac{3k^2}{2}\frac{xyz}{R^4}I_0K_0 + \left[\frac{k^2 xyz}{2R^4 r^2}(5R^2 - 3z^2)\right]I_1K_1 -$$

$$-k\frac{xy}{2R^5}\left[k^2 zR^2 + 3(R + z)\right]I_0K_1 + k\frac{xy}{2R^5}\left[k^2 zR^2 - 3(R - z)\right]I_1K_0,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2} Q = -\frac{3}{2} k^2 \frac{x z^2}{R^4} I_0 K_0 - \frac{k^2 x}{2R^4} (2R^2 - 3z^2) I_1 K_1 -$$

$$-\frac{k}{2} \frac{xz}{R^5} \left[3(R+z) + k^2 z R^2 \right] I_0 K_1 - \frac{k}{2} \frac{xz}{R^5} \left[3(R-z) - k^2 z R^2 \right] I_1 K_0 .$$

Частные производные от интеграла Фостера более высокого порядка можно получить, если воспользоваться следующим алгоритмом.

Представим некоторую частную производную от интеграла Фостера

$$Q = I_0 \left(\frac{k}{2} \left[\bar{R} + \bar{z} \right] \right) K_0 \left(\frac{k}{2} \left[\bar{R} - \bar{z} \right] \right) = I_0 (tm) K_0 (tp)$$

в виде (без аргументов функций Бесселя и Макдональда для сокращения записи)

$$DQ = A_{00} I_0 K_0 + A_{01} I_0 K_1 + A_{10} I_1 K_0 + A_{11} I_1 K_1 .$$

Производная более высокого порядка имеет вид

$$DDQ = D(A_{00} I_0 K_0) + D(A_{01} I_0 K_1) + D(A_{10} I_1 K_0) + D(A_{11} I_1 K_1) .$$

Распишем по слагаемым

$$DDQ_{00} = D(A_{00} I_0 K_0) = A'_{00} I_0 K_0 + A_{00} tm' I_1 K_0 - A_{00} tp' I_0 K_1 ,$$

$$DDQ_{01} = D(A_{01} I_0 K_1) = \left[A'_{01} - A_{01} tp' / tp \right] I_0 K_1 + A_{01} tm' I_1 K_1 - A_{01} tp' I_0 K_0 ,$$

$$DDQ_{10} = D(A_{10} I_1 K_0) = \left[A'_{10} - A_{10} tm' / tm \right] I_1 K_0 + A_{10} tm' I_0 K_0 - A_{10} tp' I_1 K_1 ,$$

$$DDQ_{11} = D(A_{11} I_1 K_1) =$$

$$= A_{11} tm' I_0 K_1 - A_{11} tp' I_1 K_0 + A'_{11} I_1 K_1 - I_1 K_1 \left[A_{11} (tp' / tp + tm' / tm) \right].$$

Перегруппируем с одинаковыми функциями I и K

$$DD00 = \left[A'_{00} - A_{01} tp' + A_{10} tm' \right] I_0 K_0 ,$$

$$DD01 = \left[A'_{01} - A_{00} tp' - A_{01} tp' / tp + A_{11} tm' \right] I_0 K_1 ,$$

$$DD10 = \left[A'_{10} + A_{00} tm' - A_{10} tm' / tm - A_{11} tp' \right] I_1 K_0 ,$$

$$DD11 = \left[A'_{11} + A_{01} tm' - A_{10} tp' - A_{11} (tp' / tp + tm' / tm) \right] I_1 K_1 .$$

Для производной по переменной x (или аналогично по y), взяв производные от аргументов функций tm и tp, имеем

$$DDx00 = \left[A'_{x00} + (A_{10} - A_{01}) \frac{k}{2} \frac{x}{R} \right] I_0 K_0,$$

$$DDx01 = \left[A'_{x01} + (A_{11} - A_{00}) \frac{k}{2} \frac{x}{R} - A_{01} \frac{x}{R(R+z)} \right] I_0 K_1,$$

$$DDx10 = \left[A'_{x10} + (A_{00} - A_{11}) \frac{k}{2} \frac{x}{R} - A_{10} \frac{x}{R(R-z)} \right] I_1 K_0,$$

$$DDx11 = \left[A'_{x11} + (A_{01} - A_{10}) \frac{kx}{2R} + A_{11} \left(\frac{2x}{R^2 - z^2} \right) \right] I_1 K_1.$$

Для производной по переменной z имеем

$$DDz00 = \left[A'_{z00} - A_{01} \frac{k}{2} \frac{z+R}{R} + A_{10} \frac{k}{2} \frac{z-R}{R} \right] I_0 K_0,$$

$$DDz01 = \left[A'_{z01} - A_{00} \frac{k}{2} \frac{z+R}{R} + A_{11} \frac{k}{2} \frac{z-R}{R} - A_{01} \frac{1}{R} \right] I_0 K_1,$$

$$DDz10 = \left[A'_{z10} + A_{00} \frac{k}{2} \frac{z-R}{R} - A_{11} \frac{k}{2} \frac{z+R}{R} + A_{10} \frac{1}{R} \right] I_1 K_0,$$

$$DDz11 = \left[A'_{z11} + A_{01} \frac{k}{2} \frac{z-R}{R} - A_{10} \frac{k}{2} \frac{z+R}{R} \right] I_1 K_1.$$

Таким образом, взятие частных производных более высокого порядка от интеграла Фостера сводится к дифференцированию по переменным алгебраических множителей у произведения функций Бесселя и Макдональда.

7.3 Программное обеспечение для математического моделирования рассеяния электромагнитного поля на 3D объекте

Для проведения математического моделирования и интерпретации результатов индуктивной электроразведки создан пакет программ D6_EH. Основной частью пакета является программа расчета электромагнитного поля, создаваемого сторонними источниками гармонического тока различного типа (плоская волна, магнитный диполь, контур) в присутствии проводящих 3D тел, погруженных в проводящее полупространство. Расчет поля базируется на численном решении системы линейных алгебраических уравнений (5.3), к

которой сводится уравнение рассеяния гармонического электромагнитного поля (4.18). Расчет составляющих поля выполняется в точках наблюдений на границе «земля-воздух» или приподнятых над границей в верхнее полупространство, моделируя воздушные или наземные методы индуктивной электроразведки. По результатам расчета составляющих поля с помощью вспомогательной программы определяются дополнительные характеристики, отражающие перераспределение электромагнитного поля вблизи проводящих объектов: фазовые углы, тензор импеданса, вектор плотности энергии Умова-Пойнтинга, оси эллипса поляризации магнитного поля, отношения составляющих поля и другие вспомогательные характеристики.

Отличительной особенностью используемого уравнения рассеяния электромагнитного поля является учет индукционного возбуждения локального тела гармоническим магнитным полем и возникающих в проводящем теле токов индукции, что позволяет исследовать рассеяние поля проводящим объектом, находящимся даже в непроводящей среде.

7.4 Интерпретация материалов низкочастотной аэроэлектроразведки.

В геофизике, в частности – в методах индуктивной электроразведки, изучение рассеяния переменного электромагнитного поля на локальных объектах является физико-математической основой их применения, используемой при исследовании геоэлектрического строения верхней части земной коры при различных масштабах исследований и поисках месторождений проводящих руд.

На перспективных участках вблизи месторождения «Сафьяновское» (Свердловская обл.) аэровариантом метода незаземленной петли НП-А проведены работы по поискам месторождений медно-колчеданных руд на площади более 300 км^2 [Человечков, 2012]. Источником электромагнитного поля являлся ток силой I = 27 А в квадратной петле размером 400х400 м с частотой f =78 Гц. Фазочувствительные измерения декартовых составляющих магнитной индукции выполнялись на высоте 85 м на борту вертолета МИ-2 с помощью аэрокомплекса АММЗ-2.

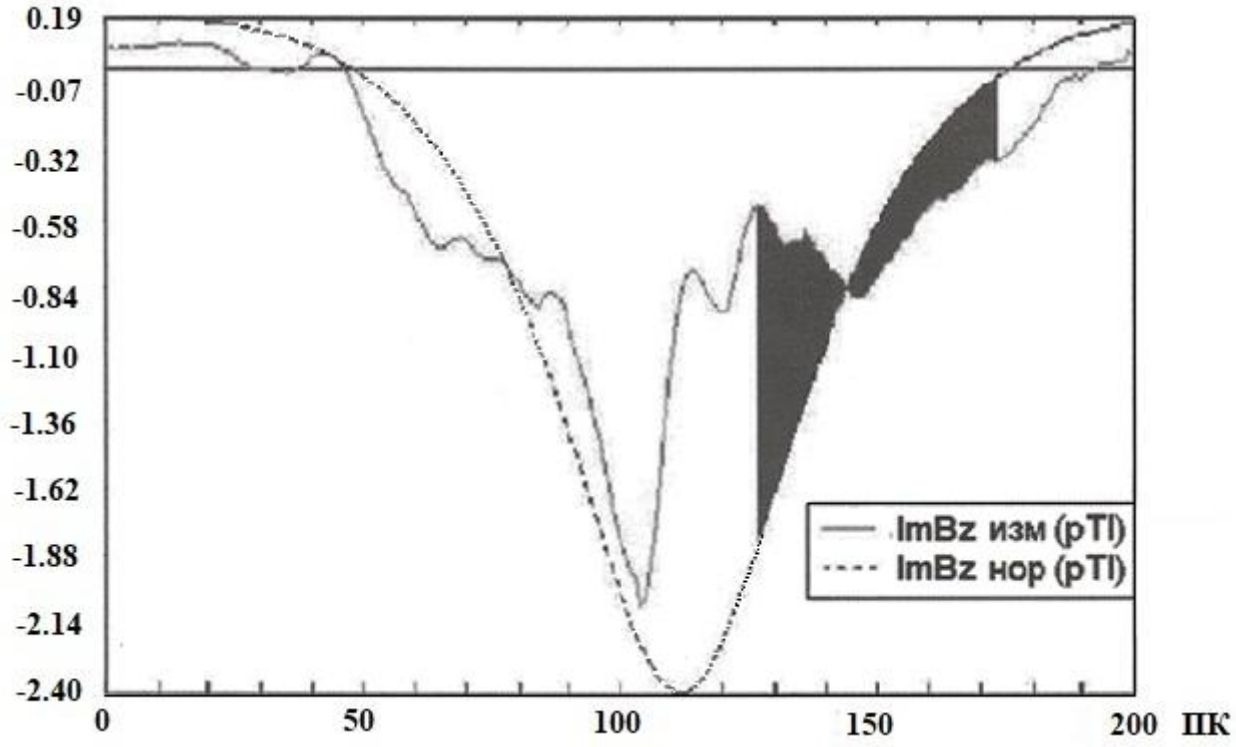


Рис. 42. Составляющие ImB_z (пТл) измеренная (сплошная) и нормальная (штриховая) на высоте 100 м по профилю длиной 6 км на участке «Бобровский».

На рис. 42 приведены графики измеренной и нормальной вертикальной составляющей магнитной индукции ImB_z по одному из профилей длиной около 6 км на участке «Бобровский», расположенном в центральной части изучаемой площади в 10 км южнее Сафьяновского месторождения на правом берегу р. Бобровки. На графике выделяется чёткая аномалия (затемненный участок). Подобная аномалия меньшей интенсивности прослеживается на соседних профилях.

На рис. 43 показан фрагмент плана изолиний аномального фазового угла составляющей B_z. В северо-восточной и восточной части относительно питающего контура отмечается две локальные аномалии электропроводности А1 и А2, обведенные черным контуром. По геофизическим данным прошедших лет на этом участке зафиксированы гравитационная аномалия, а так же аномалии проводимости и поляризуемости по данным методов МПП и ВП.

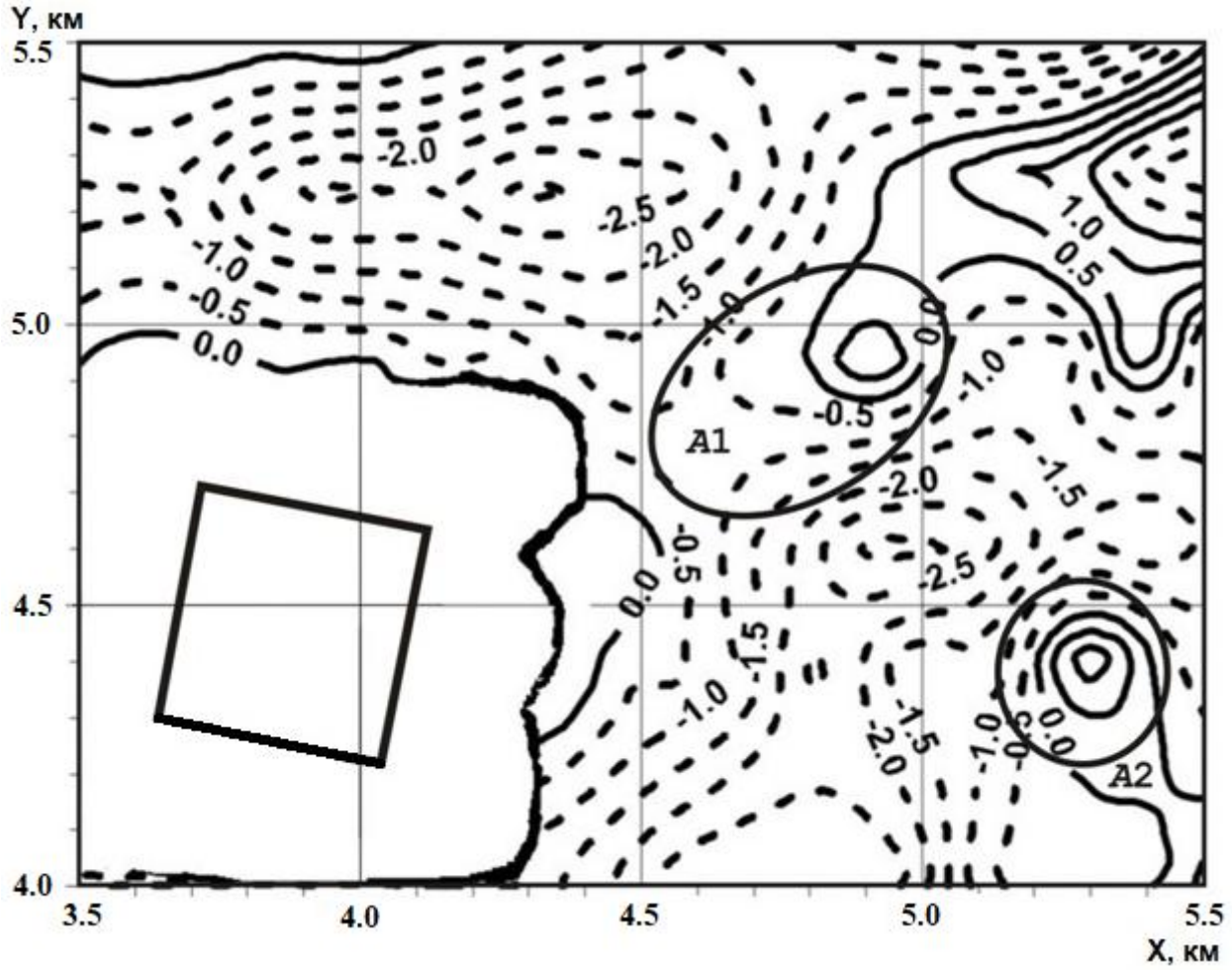


Рис. 43. План изолиний фазового угла (град.) вертикальной составляющей магнитной индукции B_z по результатам измерений аэроэлектроразведкой методом незаземленной петли НП-А на участке «Бобровский». Положение петли отмечено квадратом.

Результаты математического моделирования с использованием пакета D6_EH приведены на рис. 44 в виде плана изолиний фазового угла φ вертикальной составляющей магнитной индукции B_z и двух проводящих тел V1 и V2, создающих аномалию фазового угла с морфологией, подобной морфологии изолиний фазового угла вертикальной составляющей магнитной индукции рис. 43. Проводящие объекты в виде прямоугольных параллелепипедов имеют размеры: V1 – 125x225x50 м и V2 – 50x200x100 м, глубина центров h = 100 м. Удельное сопротивление среды принято ρ_o = 800 Ом*м, проводящих объектов ρ = 1 Ом*м. Проекции 3D тел на дневную поверхность изображены черными прямоугольниками и затемнены. Положение незаземленной квадратной петли размером 400 x 400 м изображено квадратом.

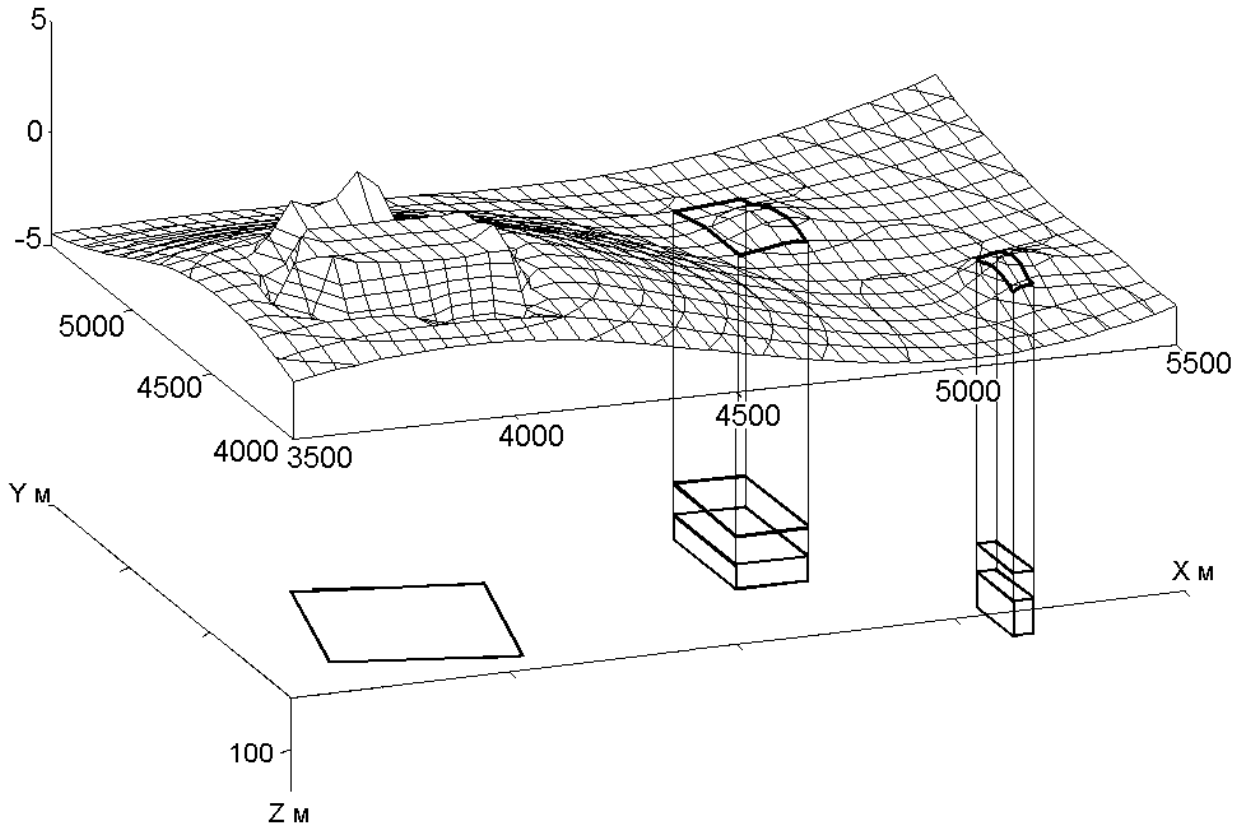


Рис. 44. План фазового угла составляющей B_z (град.) математической модели с двумя проводящими 3D объёмами (с проекциями тел на поверхность изолиний).

Для подтверждения аномалии А1, полученной по результатам интерпретации материалов аэроэлектроразведочных работ методом НП-А и уточнения ее пространственного положения, проведены детализационные работы методами наземной индуктивной электроразведки с помощью аппаратуры МЧЗ-12, разработанной в Институте геофизики УрО РАН [Человечков, 2012].

На рис. 45 приведены графики кажущегося удельного сопротивления ρ_k на 6 частотах, полученные по результатам обработки измерений полуосей эллипса поляризации магнитного поля методом индуктивного профилирования с незаземлённой петлёй размером 50х50 м с разносом R = 75 м.

Пространственное положение профиля соответствует участку профиля аэроэлектроразведочных измерений через эпицентр аномалии А1 (рис.43).

Выполненные измерения подтверждают наличие в разрезе проводящего объекта, пространственно совпадающего с аномалией А1, полученной по материалам интерпретации данных аэросъемки.

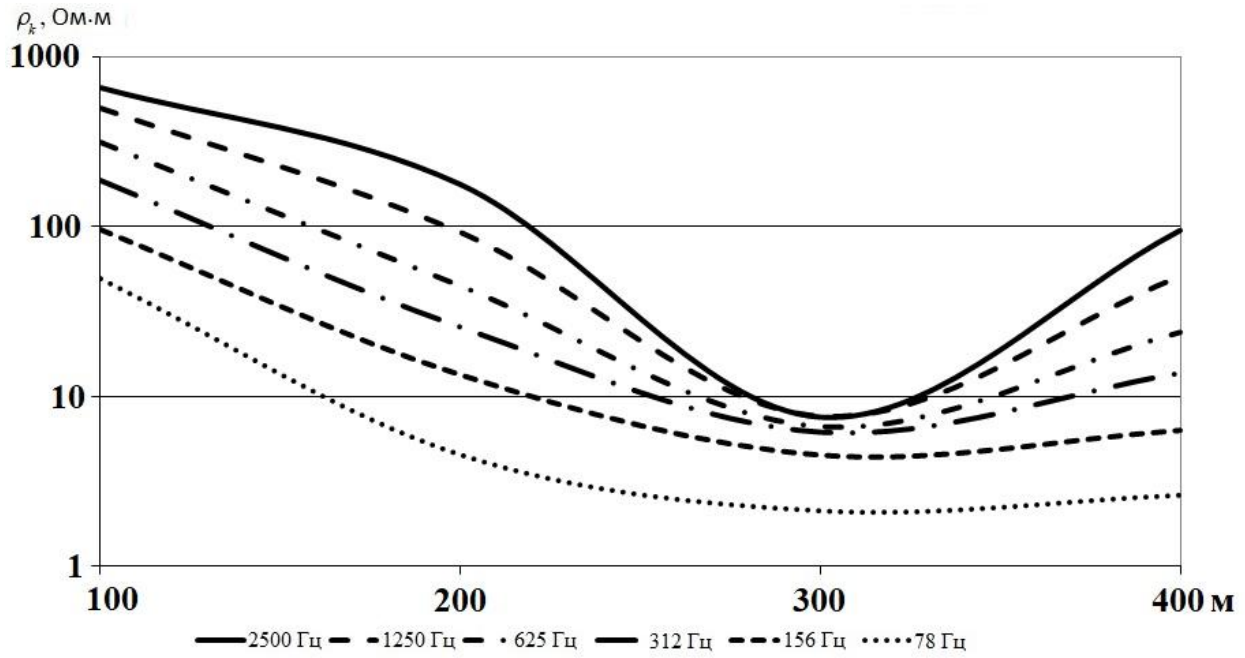


Рис. 45. Графики ρ_k (Ом·м) по результатам измерений методом индуктивного профилирования по профилю через эпицентр аномалии А1 на ряде частот.

Выполненные полевые измерения показали высокую эффективность измерений магнитного поля в методе НП-А с применением аэрокомплекса АММЗ-2, при которых сохраняется информативность наземных методов и появляются дополнительные возможности, обусловленные увеличением производительности работ и возможности проведения исследований на труднодоступных участках местности.

Исследования являются основой для дальнейшего развития аэроэлектроразведки с фазочувствительными измерениями в воздухе при создании электромагнитного поля мощным наземным индуктивным источником.

7.5 Оптимальная частота индукционных зондирований

Вопрос выбора оптимальной частоты или диапазона рабочих частот переменного тока в незаземленном контуре индуктивного источника продолжает оставаться одним из актуальных, наравне с другими параметрами момента источника – силой гармонического тока и площадью контура. Важность этого вопроса заключается в необходимости проведения полевых измерений индуктивной электроразведкой на таких частотах, которые позво-

ляют гарантированно выделять аномалии поля от искомых проводящих рудных объектов.

В качестве примера рассмотрим результаты наземных электроразведочных работ, выполненных на участке, описанном в предыдущем разделе. С целью определения размеров и положения аномального объекта А1 в плане на исследуемом участке выполнены измерения в варианте индукционного электромагнитного дистанционного зондирования методом незаземленной петли (НП-Н) с положением питающей петли, приближенной к аномальному участку, выделенному по результатам методом НП-А. Детализационные электроразведочные работы выполнены на шести дискретных частотах диапазона от 39 до 1250 Гц с измерением большой и малой осей эллипса поляризации магнитного поля в плоскости измерительных профилей по методике, изложенной в работе [Светов, 1973]. Работы производились путем площадной съемки планшетов вне незаземленной квадратной петли со стороной размером 200 м.

На рис. 46 приведены планы изолиний ρ_k однородного полупространства, полученные по результатам измерений эллипса поляризации магнитного поля на четырех частотах 78 ÷ 625 Гц. Результаты измерений магнитного поля на низкой частоте 39 Гц показали слабую помехоустойчивость и плохое качество получаемых материалов при выделении аномальной зоны.

Измерения поля на частоте 1250 Гц при высокой помехозащищенности, напротив, показали, что выделенная низкочастотная аномальная зона теряется на фоне аномалии-помехи, обусловленной приповерхностным проводником, расположенным в северо-восточной части планшета.

Эпицентр аномального участка электропроводности на частоте 78 Гц отмечается на профилях № 200 – 300 и с увеличением частоты до 156 Гц смещается севернее, где расположен приповерхностный проводник в виде заболоченного участка местности.

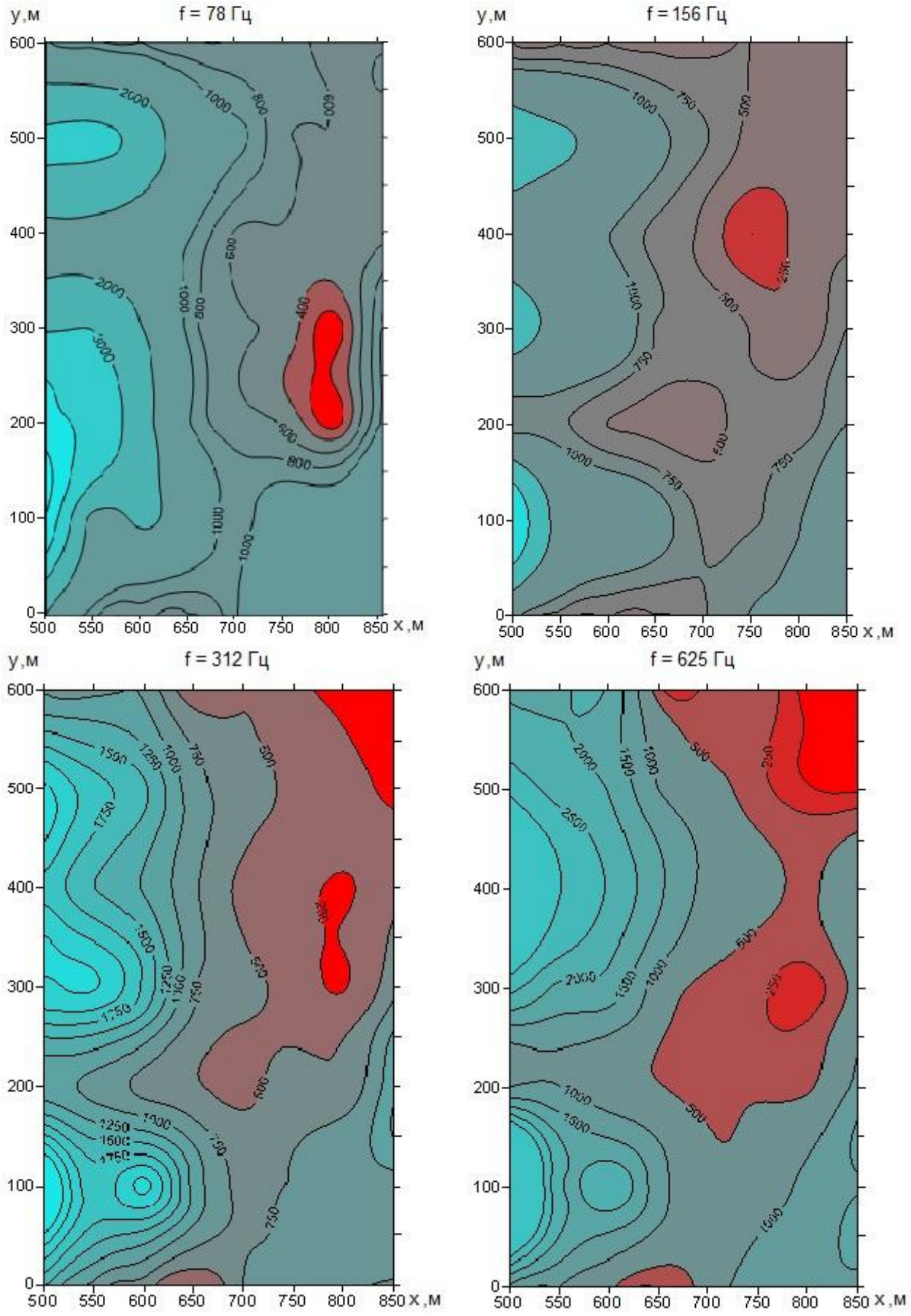


Рис. 46. Планы изолиний $\rho_к$ на частотах 78 ÷ 625 Гц по результатам измерений магнитного поля методом НП-Н на участке «Бобровский».

Дальнейшее увеличение частоты тока до 312 и 625 Гц приводит к тому, что аномалия от приповерхностного проводника сначала сравнивается, а затем превышает аномалию от погруженного объекта.

Приведенные материалы полевых работ методом индуктивной электроразведки ставят задачу изучения влияния частоты тока в источнике для разбраковки аномалий от погруженных высокопроводных рудных тел и приповерхностных проводящих объектов. В работе [Каменецкий и др., 1957] на основе математического и физического моделирования рассеяния электромагнитного поля на локальных проводниках простой геометрической формы (шар, цилиндр, диск) обоснован выбор оптимальной частоты гармонического тока в источниках поля, применяемых в индуктивной электроразведке при поисках месторождений проводящих руд. При амплитудно-фазовых измерениях выбор такой частоты (или оптимального диапазона частот) обеспечивает получение максимальных амплитудных и фазовых аномалий составляющих магнитного поля над изучаемыми локальными объектами с заданными значениями удельных электрических сопротивлений, размеров и глубиной залегания тел относительно системы наблюдений поля.

Полученные результаты основываются на аналитических расчетах аномального гармонического магнитного поля проводящих тел в непроводящей среде (магнитное возбуждение), в однородном внешнем магнитном поле. Следует отметить, что полученные выводы не учитывают существенного вклада электрического возбуждения проводящего объекта токами проводимости, если он расположен в проводящей среде. Аналитическое решение задачи рассеяния однородного электрического и магнитного поля на проводящем шаре в проводящей среде получено в работе [Борн, Вольф, 1973]. Соотношение между вкладом в аномальное магнитное поле от электрического и магнитного возбуждения проводящего объекта существенно зависит не только от физико-геометрических параметров объекта, но и от частоты и электропроводности вмещающей среды. Вопрос о выборе оптимальной частоты возникает также в связи с разбраковкой аномалий магнитного поля индук-

тивного источника, вызванных глубинными искомыми рудными объектами и приповерностными проводниками.

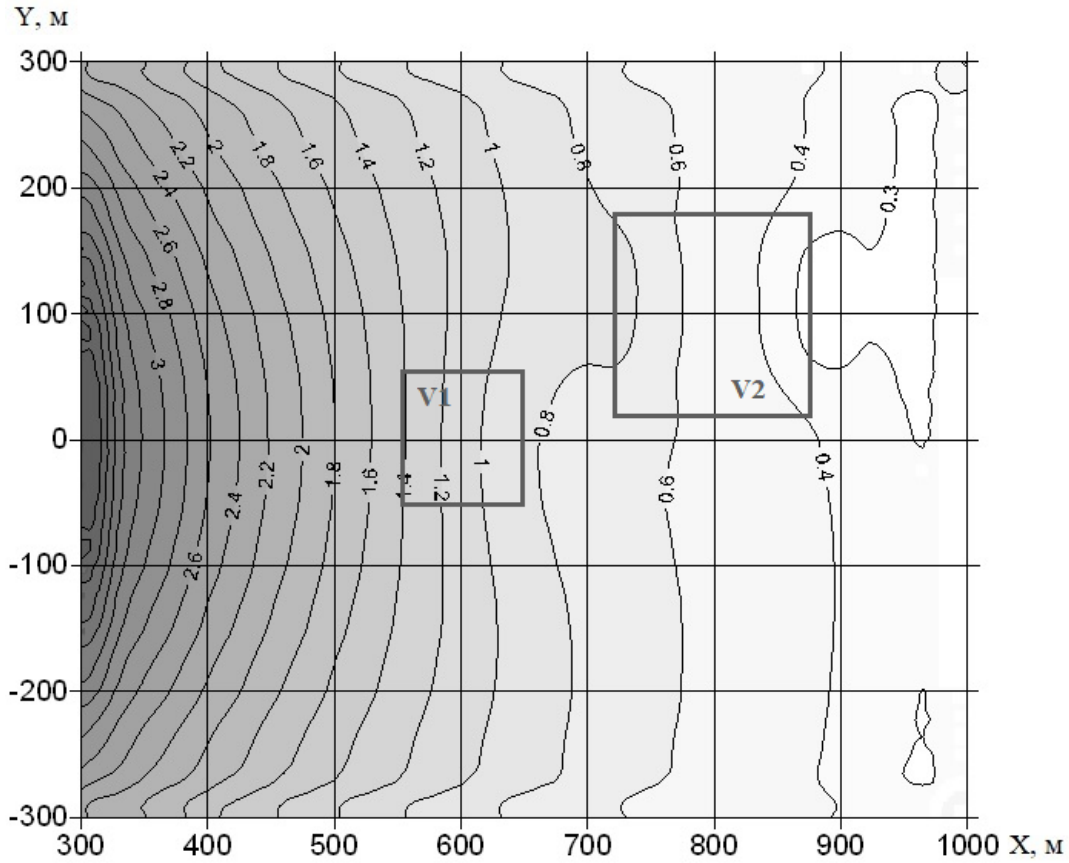


Рис. 47. Планы изолиний ImB_z - составляющей магнитного поля, пТл, над 3D-проводящими объектами на частоте $f = 100$ Гц

Для решения поставленной задачи воспользуемся математическим моделированием с изучением рассеяния переменного электромагнитного поля на двух локальных проводящих 3D объектах, один из которых аппроксимирует погруженное проводящее рудное тело с высокой электропроводностью, а второе – приповерхностное проводящее тело, образованное рыхлыми четвертичными отложениями или обводненным участком местности.

Изучение частотных закономерностей изменения магнитного поля в среде с 3D проводящими объектами выполнено нами с помощью математического моделирования методов индуктивной электроразведки с помощью пакета программ D6_EH, описанного выше.

Результаты математического моделирования приведены в виде планов изолиний мнимой квадратуры вертикальной составляющей магнитной индукции ImB_z (рис. 47, 49) и фазового угла φ_{Bz} (рис. 48, 50), которые наиболее

сильно отражают наличие проводящего объекта, над двумя 3D проводниками V1 и V2 на двух частотах.

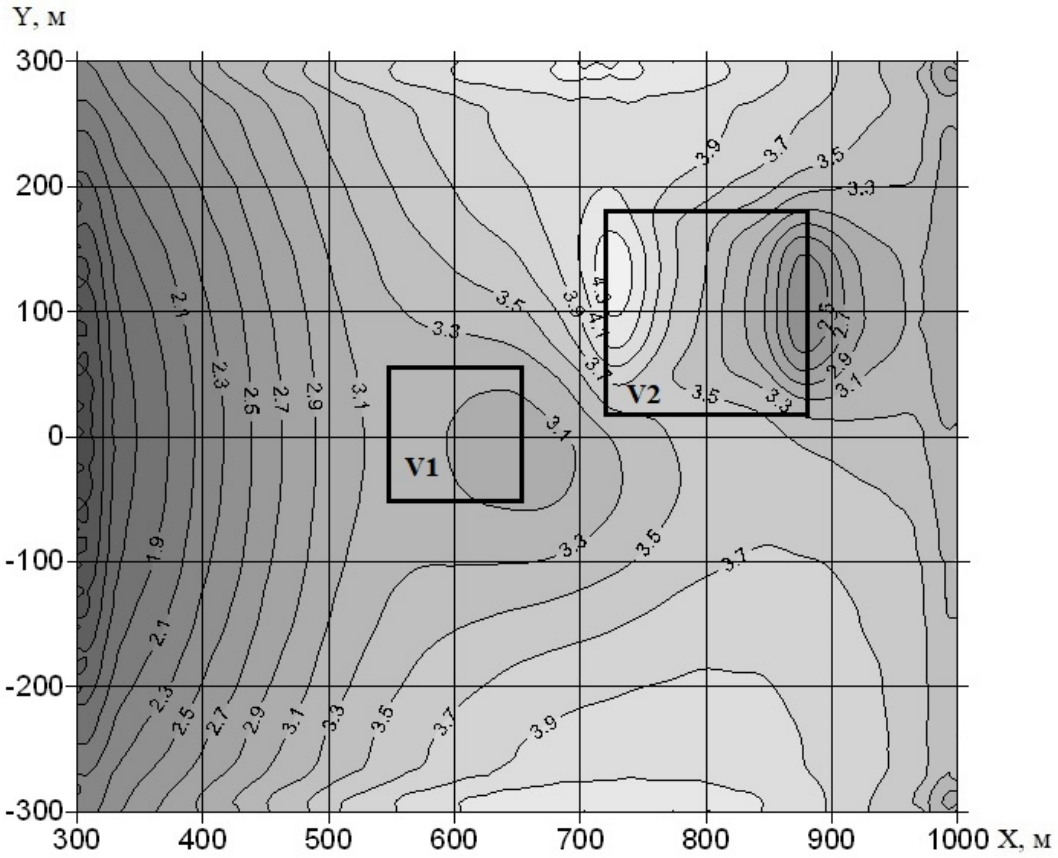


Рис. 48. Планы изолиний фазового угла φB_z, град, над 3D-проводящими объектами на частоте f = 100 Гц

Проводящие объекты в виде параллелепипедов имеют размеры V1: 100·100·100 м и V2: 150·150·10 м, глубина положения центров тел h_{V1} = 200 м, h_{V2} = 10 м.

Удельное электрическое сопротивление вмещающей среды ρ_o = 500 Ом·м, проводящих объектов ρ_{V1} = 1 Ом·м, ρ_{V2} = 20 Ом·м.

Проекции 3D тел на дневную поверхность изображены прямоугольниками. Центр квадратной петли размером 200 х 200 м с гармоническим током силой I = 1 А расположен в начале системы координат. Высота точек наблюдений z = 1 м.

Изолинии ImB_z и фазового угла φ B_z - составляющей магнитного поля над проводящим полупространством представляют собой замкнутые кривые, близкие к окружности относительно центра источника

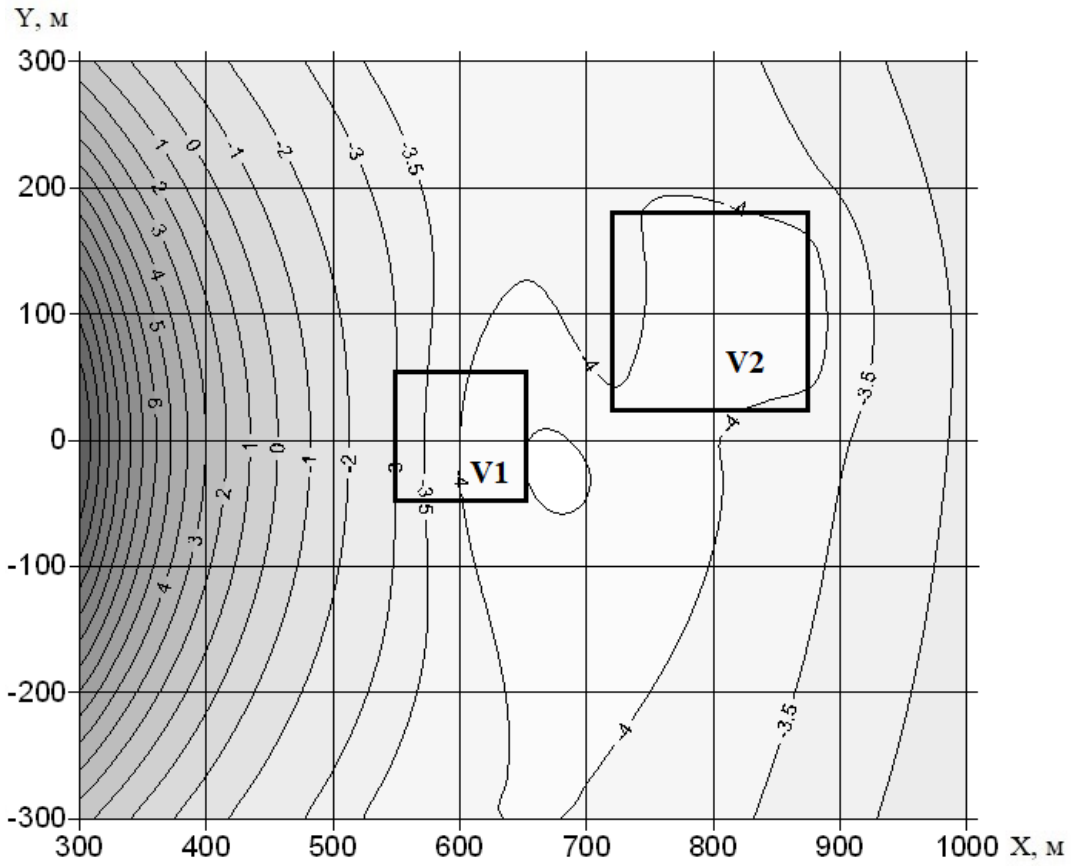


Рис. 49. Планы изолиний ImB_z - составляющей магнитного поля, пТл, над 3D-проводящими объектами на частоте $f = 1$ кГц

Вблизи источника ImB_z и φ_{Bz} равны нулю, с удалением от контура они достигают экстремальных значений и далее плавно убывают с удалением от центра петли. Результаты математического моделирования приведены в виде планов изолиний мнимой квадратуры вертикальной составляющей магнитной индукции ImB_z (рис. 47, 49) и фазового угла φ_{Bz} (рис. 48, 50), которые наиболее сильно отражают наличие проводящего объекта, над двумя 3D проводниками V1 и V2 на двух частотах.

Рост частоты от 100 Гц до 1 кГц приводит к заметному увеличению аномального эффекта над обоими проводящими объектами. При этом увеличение аномалии ImB_z и фазового угла φ_{Bz} над приповерхностным объектом существенно превосходит аномалию над погруженным 3D проводником V1.

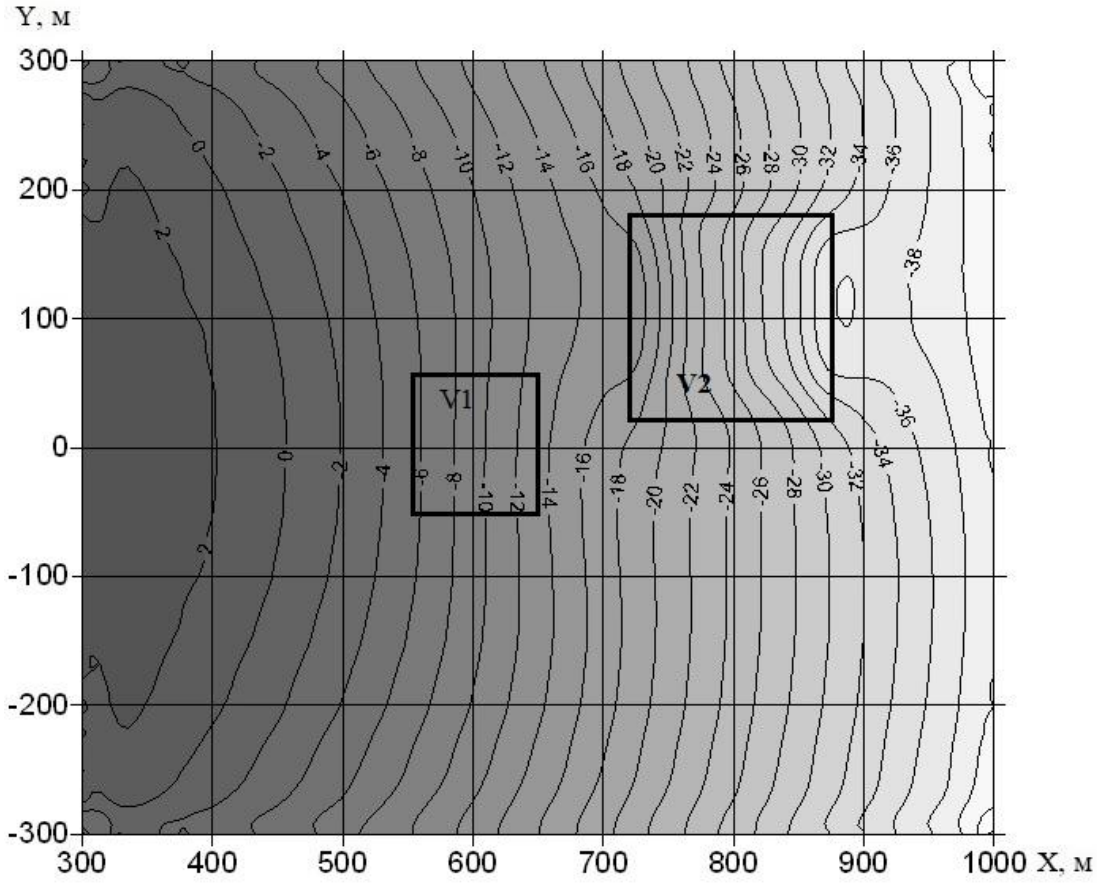


Рис. 50. Планы изолиний фазового угла B_z, град, над 3D-проводящими объектами на частоте $f = 1$ кГц

На рис. 51 - 52 приведены кривые фазового угла φ_{Bz} по двум профилям Y = 0 и Y =100 м, проходящим над центрами проекций проводящих тел на трех дискретных частотах $f = 100$, 300 и 500 Гц.

Как видно из приведенных графиков, с ростом частоты аномалия фазового угла по профилю над приповерхностным проводящим телом существенно превышает аномалию над погруженным 3D объектом, аппроксимирующим проводящее рудное тело. Как следствие, подобное соотношение получается и в аномалиях ImB_z - составляющей магнитного поля.

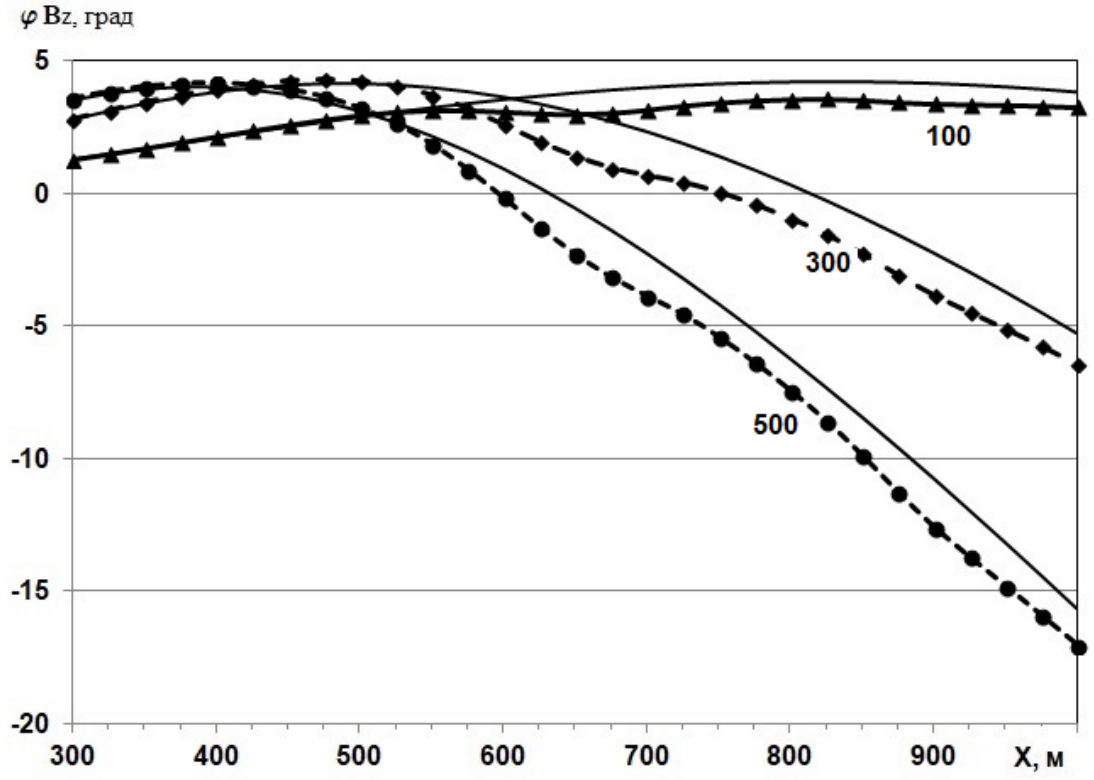


Рис. 51. Графики φ_{Bz} по профилю Y = 0 м над центрами проекций 3D объектов V1 при ρ_o = 500 Ом·м. Шифр кривых – частота тока в источнике

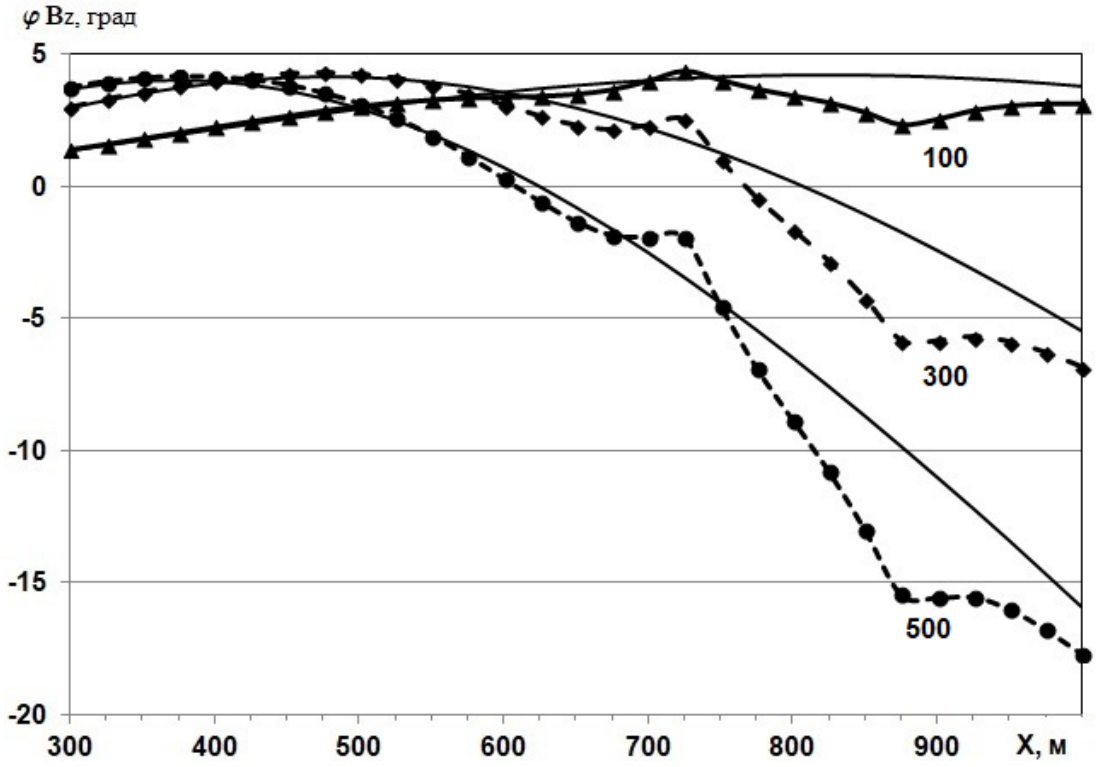


Рис. 52. Графики φ_{Bz} по профилю Y = 100 м над центрами проекций 3D объектов V1 при ρ_o = 500 Ом·м. Шифр кривых – частота тока в источнике

Эти выводы объясняют изменение аномалии-помехи в величинах ρ_k, полученных при измерениях осей эллипса поляризации магнитного поля мето-

дом НП-Н на ряде частот (рис. 46), величина которой уменьшается с ростом частоты.

Для изучения частотных зависимостей магнитного поля гармонического тока индуктивного источника выполнены расчеты магнитного поля и фазового угла в дискретных точках на спектре частот для двух моделей с одним 3D-проводящим объектом. В одном случае объект аппроксимирует погруженное рудное тело с высокой электропроводностью, в другом – приповерхностное низкоомное тело, образованное проводящими четвертичными отложениями. Размеры и параметры 3D объектов соответствуют приведённым выше.

На рис. 53 - 54 приведены частотные зависимости аномальных значений фазового угла $\varphi_a = \varphi - \varphi_0$ вертикальной составляющей магнитной индукции в точке X = 675 м, Y = 0 м над проводящими 3D-объектами V1 (рис. 53) и V2 (рис. 54) при ρ_{V1} = 1 Ом·м, ρ_{V2} = 20 Ом·м для двух значений удельного электрического сопротивления вмещающей среды ρ_o = 500 и 1000 Ом·м.

Из приведенных на рис. 53 - 54 частотных зависимостей видно, что величины аномальных фазовых углов магнитного поля существенно зависят от частоты тока в источнике и контрастности удельных сопротивлений локальных объектов и вмещающей среды.

Аномальная величина фазового угла φ_{Bz} в точках над 3D-объектом, аппроксимирующим приповерхностный проводник, существенно больше по абсолютной величине, чем над погруженным проводником. Это происходит потому, что в хорошо проводящем теле система токов формируется в приповерхностном скин-слое проводника уже на низкой частоте и дальнейшее увеличение частоты существенно не влияет на его перераспределение.

В приповерхностном проводнике, обладающем более низкой электропроводностью, для формирования скин-слоя необходимы гораздо более высокие частоты.

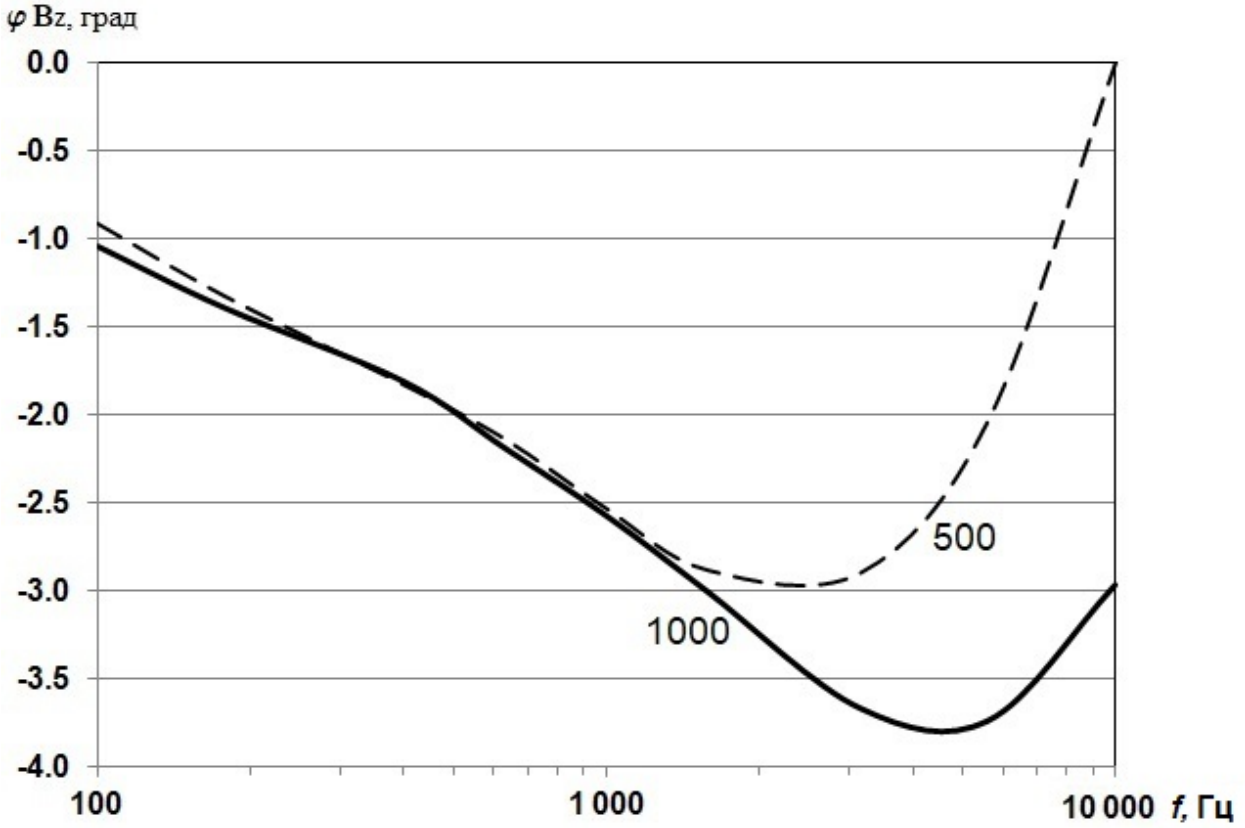


Рис. 53. Частотные зависимости аномального фазового угла $\varphi_{a\ Bz}$ над 3D объектами V1 при ρ_o =500 и 1000 Ом·м (шифр кривых)

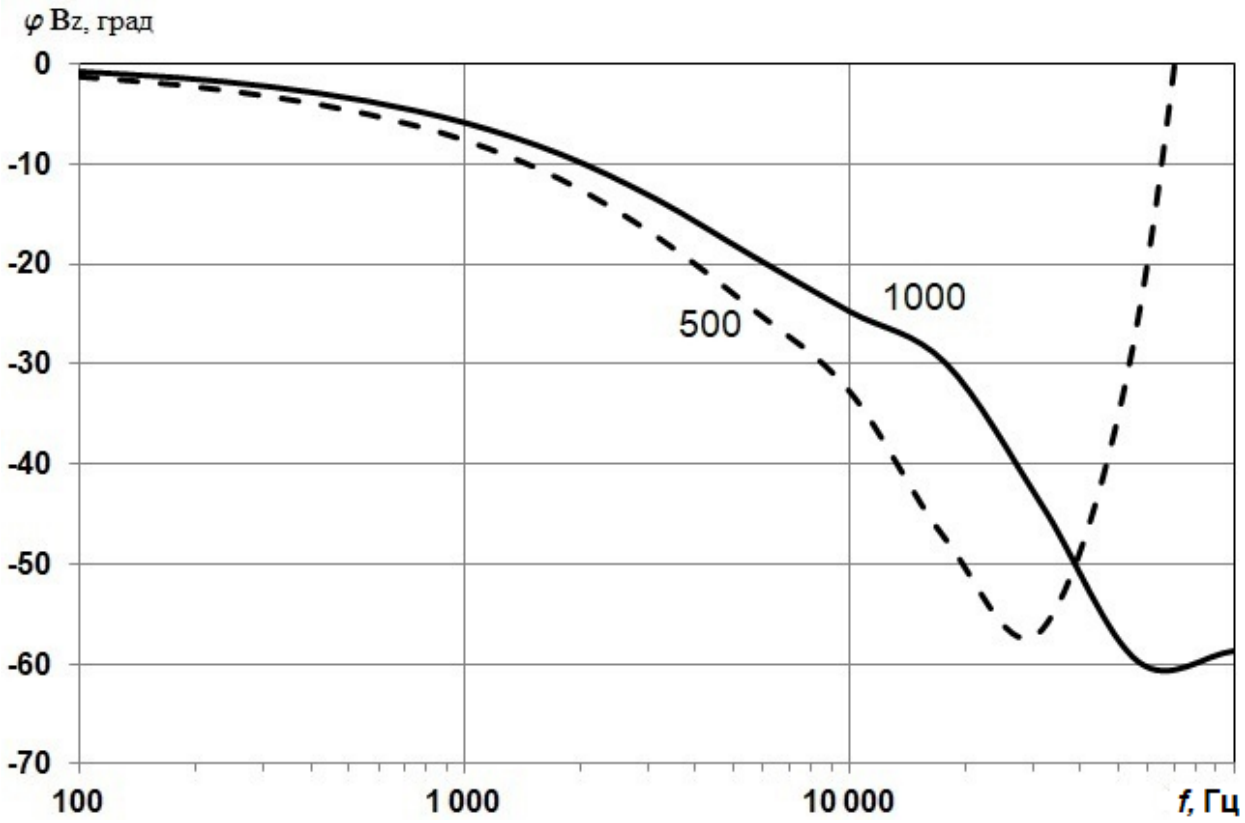


Рис. 54. Частотные зависимости аномального фазового угла $\varphi_{a\ Bz}$ над 3D объектами V2 при ρ_o =500 и 1000 Ом·м (шифр кривых)

Полученная зависимость соответствует поведению квадратур и фазового угла φ вертикальной составляющей магнитной индукции для источника в виде вертикального магнитного диполя и проводящей S-плоскости, расположенных на границе сред «земля-воздух» [Арзамасцев и др. 2020].

Частота тока, соответствующая положению экстремума фазового угла, определяется мощностью и удельным электрическим сопротивлением приповерхностного проводника (величиной продольной проводимости S).

Разбраковка аномалий магнитного поля над проводящими объектами на «рудные» и «безрудные» может быть проведена по изучению частотных характеристик поля в аномальных зонах.

Для достижения значимого аномального эффекта измеряемых параметров магнитного поля над высокопроводящим локальным объектом V1 при высокой контрастности удельных сопротивлений необходимо ограничиться низкими частотами исследований, при этом максимальная величина аномального фазового угла составляет первые единицы градуса.

Выбор рабочей частоты тока в индуктивном источнике обычно обуславливается двумя взаимоисключающими факторами: с одной стороны, рабочая частота должна быть как можно более низкой для уменьшения скин-эффекта во вмещающей проводящей среде и увеличения глубинности исследований. С другой стороны, частота должна быть, возможно, более высокой для увеличения чувствительности и помехоустойчивости индукционных датчиков поля.

Проведенные исследования показали, что для выделения аномалий поля над погруженными проводящими объектами и разбраковки аномалий-помех, вызванных приповерхностными образованиями, необходимы измерения поля в возможно более низкочастотной области спектра тока.

7.6 Проектирование новых методов аэроэлектроразведки.

Общим недостатком аэроэлектроразведки методами профилирований или зондирований является влияние различных видов помех на измеряемое в

движении магнитное поле: механическая вибрация, электромагнитные помехи от летательного аппарата и его собственное влияние как локального проводника, пространственные колебания выносной системы датчиков за счет метеоусловий и др.

Влияния многочисленных видов помех можно избежать, если составляющие электромагнитного поля, создаваемого перемещаемым на летательном аппарате индуктивным источником гармонического тока в виде вертикального магнитного диполя (многовиткового контура с током), измерять на дневной поверхности в одной или нескольких фиксированных точках [Человечков, 2011].

Для интерпретации материалов о величинах составляющих электромагнитного поля необходимо регистрировать время и координаты точек положения летательного аппарата, а также время измерений поля. Современные навигационные средства позволяют с высокой точностью регистрировать время и координаты. По соответствующим временам соотносят величины измеряемого поля и положения излучателя относительно неподвижной точки измерения.

Полученные значения составляющих поля следует отнести к точкам положения излучателя и пересчитать их в составляющие цилиндрической системы координат относительно координат точки измерения. Использование цилиндрических координат обладает существенным преимуществом перед прямоугольными координатами. Поскольку излучатель в виде приподнятого вертикального магнитного диполя создает на поверхности однородного полупространства только составляющие электромагнитного поля B_z, B_r и E_φ, то составляющие B_φ и E_r являются чисто аномальными, непосредственно связанными с наличием в среде проводящих объектов или зон пониженного сопротивления. Величины измеряемого электромагнитного поля являются абсолютными.

Для использования относительных величин, не требующих определения точной величины момента излучателя, предпочтительнее использовать фазо-

вые углы составляющих поля $\alpha_{E,B}$ или импедансы Z_{ij}. При этом в величинах α_{E_φ}, α_{B_r}, α_{B_z}, $Z_{\varphi r}$, $Z_{\varphi z}$ выделение аномальных участков среды с повышенной электропроводностью выполняется по их отклонению от нормальных значений для однородной среды.

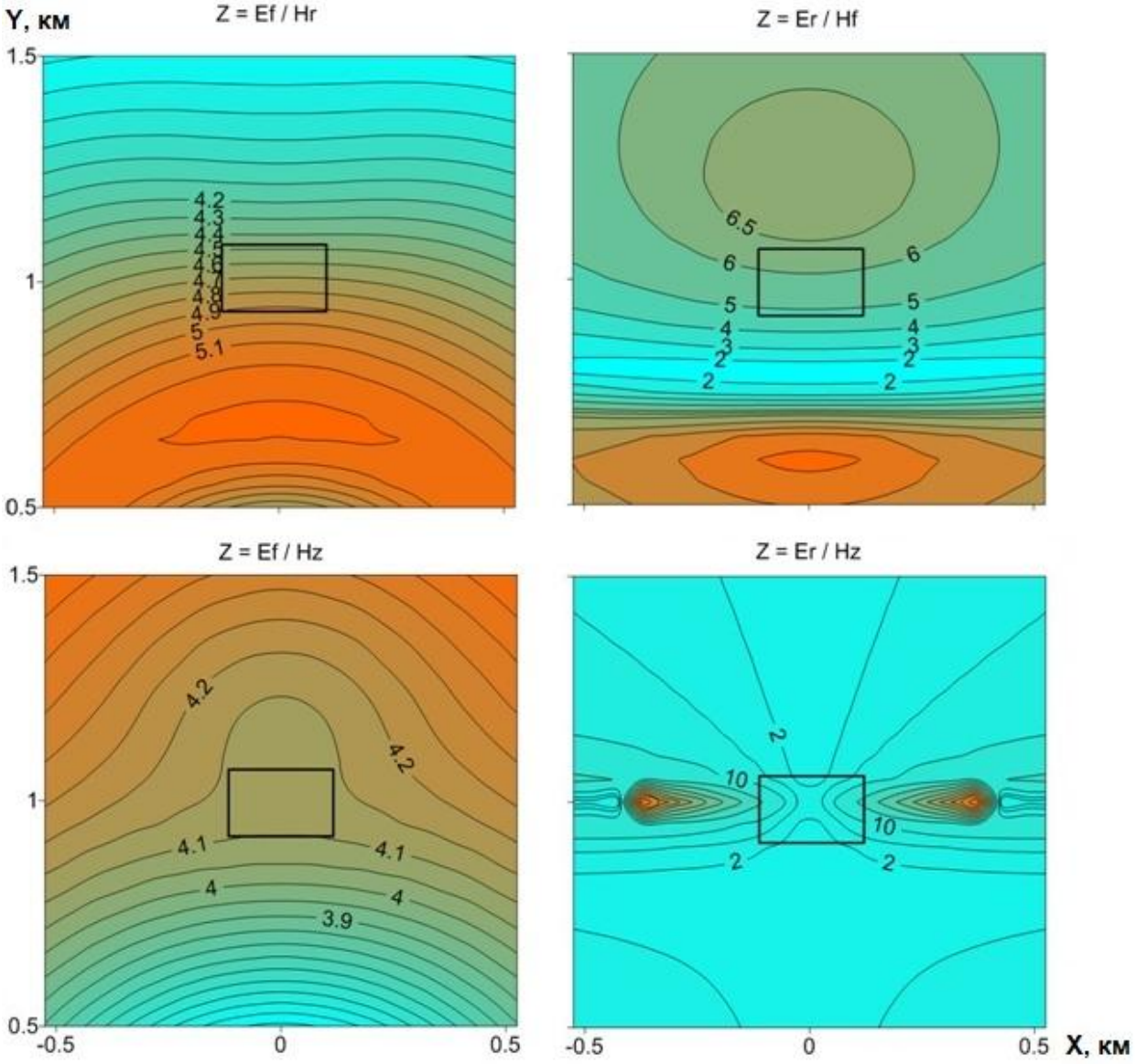


Рис. 55. Планы импедансов Z_{ij} над 3D телом с относительными удельными сопротивлениями среды ρ_0 = 1000 и 3D тела ρ_V = 1 Ом·м, h = 100 м, вертикальный момент диполя $M_z = 10^4$ А·м^2, частота тока f =1 кГц

Относительные величины электромагнитного поля α_{E_r}, α_{B_φ}, $Z_{r\varphi}$, Z_{rz} являются аномальными, что позволяет сразу определить наличие в среде локальных проводящих объектов (рис. 55).

Выполненное математическое моделирование для проводящего 3D-тела,

удаленного на 1 км от точки измерений, показывает, что составляющие магнитного и электрического поля являются вполне измеримыми величинами для тела с размером 250x150x50 м.

Измерение всех составляющих электрического и магнитного поля позволяет использовать для анализа дополнительный параметр поля – вектор плотности энергии электромагнитного поля, называемый вектором Умова – Пойнтинга $\vec{S} = \frac{1}{2} Re\left[\vec{E} x \vec{H}^* \right]$, определяющий направление переноса энергии.

Предложенный способ обладает гораздо более высокой чувствительностью и точностью по сравнению с подвижными измерительными аэросистемами за счет неподвижного положения датчиков системы регистрации. При этом многокомпонентные измерения составляющих электромагнитного поля позволяют более уверенно выделять локальные проводящие объекты и зоны пониженного сопротивления.

Использование мощной воздушной генераторной системы совместно с неподвижной системой регистрации, размещаемой вблизи изучаемого участка, позволяет проводить геоэлектрические исследования в труднодоступных районах со сложными условиями измерений для наземных методов электроразведки (озера, карьеры, отвалы, труднопроходимая тайга и пр.).

7.7 Информативные измеряемые параметры в методах индуктивной электроразведки.

Измеряемыми информативными параметрами в методах низкочастотной электроразведки, отражающими зависимость электромагнитного поля от проводящих свойств геологической среды, являются пространственные составляющие напряженностей поля и их относительные характеристики – импедансы, фазовые углы, отношения составляющих поля и др. Вместе с традиционно измеряемыми параметрами поля, отражающими проводящие свойства среды, большой интерес вызывает использование параметров эллипса поляризации магнитного поля.

Само появление эллиптической поляризации гармонического магнитного поля обусловлено наличием двух полупространств – верхнего непроводящего (воздух) и нижнего проводящего (земля), благодаря чему магнитное поле приобретает эллиптическую поляризацию, причем тем больше, чем выше электропроводность подстилающего полупространства.

Идея использования характеристик эллипса поляризации переменного магнитного поля, создаваемого гармоническим током стороннего источника с ориентацией измерительных катушек в вертикальной плоскости, проходящей по линии «источник-приемник», для определения проводящих свойств среды известно достаточно давно [Заборовский, 1963]. Причем в качестве излучателей поля применяются предпочтительно индуктивные источники (незаземленная петля или магнитный диполь), поскольку явление индукции и поляризация магнитного поля проявляются с ними более сильно, чем с гальваническими источниками (заземленная линия или электрический диполь).

Непосредственные измерения величин полуосей эллипса поляризации магнитного поля при последовательной ориентации измерительной катушки в плоскости поляризации поля с нахождением экстремальных значений является очень низкопроизводительной операцией. Более качественным способом определения полуосей эллипса поляризации являются фазочувствительные измерения декартовых составляющих магнитного поля H_x, H_z с фиксированной ориентировкой ортогональных измерительных катушек в вертикальной плоскости XOZ относительно линии «источник-приемник» и дальнейшим пересчетом квадратурных компонент поля *Re* и *Im* в величины большой и малой полуосей эллипса [Светов, 1973; Якубовский, 1988].

Устройство для реализации данного способа требует применения сложной фазочувствительной аппаратуры с передачей фазы тока от источника поля к измерителю.

Известен более простой способ измерения полуосей эллипса поляризации магнитного поля с ориентировкой приемных катушек в вертикальной плоскости, проходящей по линии «источник-приемник» и устройство для его

осуществления [Светов, 1960], заключающийся в применении двух взаимно-перпендикулярных датчиков магнитного поля, в котором сигнал, принятый одним датчиком, поворачивают по фазе на угол, равный четверти периода, а затем половине периода и после каждого поворота фазы складывают с сигналом, снимаемым со второго датчика; полученные два напряжения выпрямляются и определяют их полусумму и полуразность, которые численно пропорциональны большой и малой полуосям эллипса поляризации.

Необходимо отметить, что в условиях неоднородной проводящей среды плоскость поляризации магнитного поля может существенно отклоняться от вертикальной плоскости, проходящей через источник и точку измерений, хотя эллиптическая поляризация поля сохраняется. Для точного определения полуосей полного эллипса поляризации в пространстве необходимы измерения трех составляющих магнитного поля, реализованные в способе [Ратушняк, Коноплин, 2022]. При этом кроме регистрации амплитуд трех составляющих поля выполняют измерения относительных сдвигов фаз составляющих поля.

Поясним физические принципы реализации предложенного способа и его преимущества перед традиционно используемыми методами измерения полуосей эллипса поляризации магнитного поля. Первая особенность гармонического электромагнитного поля заключается в том, что, являясь пространственным инвариантом, величины полуосей эллипса поляризации не зависят от пространственной ориентации датчиков трех декартовых составляющих поля.

Повороты измерительной системы координат в пространстве на произвольные углы (ориентация ортогональных датчиков) изменяют только проекции эллипса на оси координат.

На рис. 56 изображен эллипс поляризации магнитного поля, его полуоси и составляющие магнитного поля H_x, H_z в основной и $H_{x'}, H_{z'}$ в смещенной системах декартовых координат. Поворот системы координат, т.е. изменение ориентации датчиков поля, приводит к изменению угла наклона большой полуоси эллипса поляризации θ и величин составляющих магнитного

поля H_x, H_z. При этом сами величины полуосей эллипса поляризации, что является самым важным обстоятельством, не изменяются.

Эта инвариантность поля используется в методике измерений полуосей проекции эллипса поляризации на плоскость профиля [Светов, 1966].

Главным обстоятельством инвариантности эллипса поляризации магнитного поля является его сохранение в случае пространственного изменения ориентации всех трех ортогональных датчиков магнитного поля.

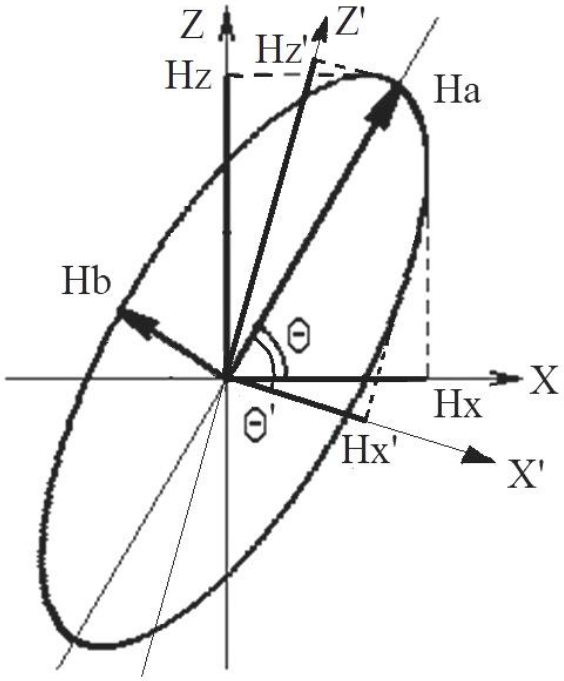


Рис. 56. Эллипс поляризации магнитного поля и его проекции в основной XZ и смещенной X’Z’ системах координат

Пространственная инвариантность эллиптической поляризации особенно важна в подвижных измерительных системах аэроэлектроразведки, выполняющих регистрацию составляющих магнитного поля, которые особенно сильно зависят от ориентации датчиков поля.

Второй особенностью является временна́я инвариантность поля. Она заключается в том, что величины полуосей эллипса поляризации не зависят от абсолютных значений сдвига фаз составляющих магнитного поля относительно фазы тока в источнике поля и достаточно ограничиться относительными измерениями сдвигов фаз составляющих поля. На рис. 57 изображена пространственно-временная развертка эллипса поляризации магнитного поля

в системе координат *xzt*, где в качестве одной из осей является время. Временная развертка вектора магнитного поля представляет собой дискретное положение конца вектора магнитного поля, ортогонального оси *t* и вращающегося в плоскости *xz* по поверхности цилиндра с эллиптическим основанием, в заданный момент времени *t* и представляет собой винтовую линию.

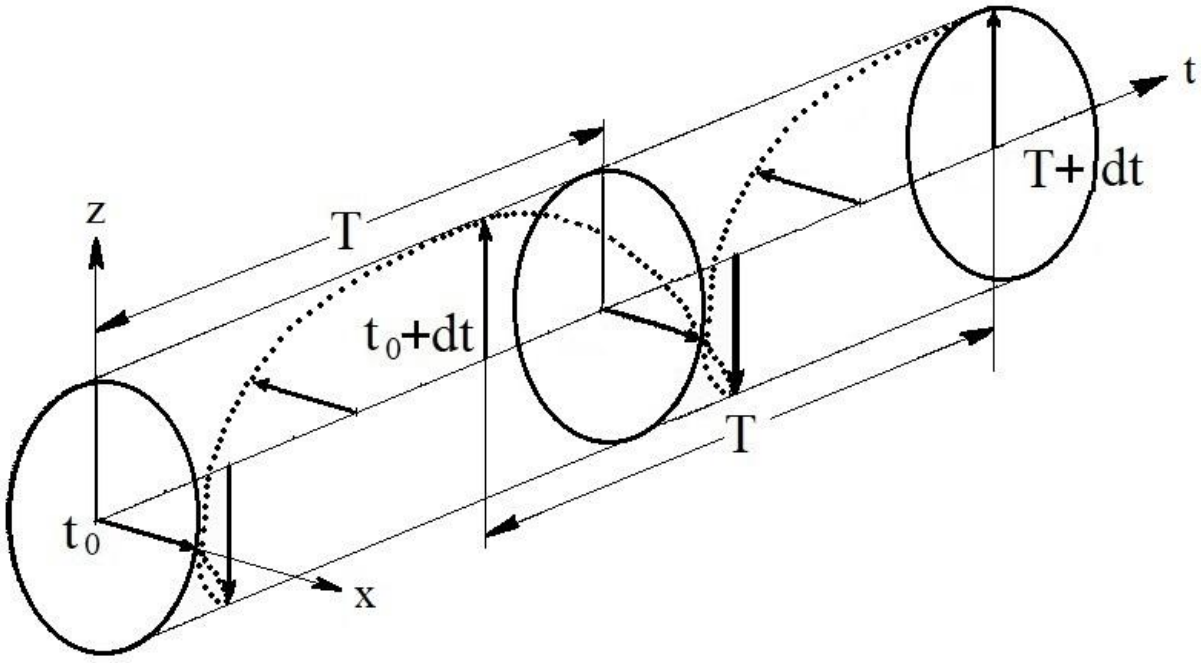


Рис. 57. Пространственно-временная развертка поляризованного магнитного поля в системе координат *xzt*

Измерения величин составляющих магнитного поля H_x, H_z за период T могут быть выполнены как при синхронизации начала фаз измеряемого сигнала относительно фазы тока в источнике относительно времени t_0 (что реализуется в фазочувствительной аппаратуре), так и за тот же период T относительно времени t_0+dt, если за начало отсчета принять фазу сигнала внутреннего генератора измерителя или одного из датчиков поля.

За период T вектор магнитного поля описывает эллипс начиная с произвольного момента времени, если проецировать его на плоскость *xz*. Эта инвариантность поля сохраняется в случае произвольной ориентации ортогональных датчиков магнитного поля.

По амплитудам трех составляющих магнитного поля H_x, H_y, H_z и относительным фазам φ_x, φ_y, φ_z, одна из которых принимается за начальную фа-

зу, величины полуосей полного эллипса поляризации магнитного поля в пространстве определяют по формулам:

$$H_a = \sqrt{H_x^2 cos^2(\varphi_x + \alpha) + H_y^2 cos^2(\varphi_y + \alpha) + H_z^2 cos^2(\varphi_z + \alpha)},$$

$$H_b = \sqrt{H_x^2 sin^2(\varphi_x + \alpha) + H_y^2 sin^2(\varphi_y + \alpha) + H_z^2 sin^2(\varphi_z + \alpha)},$$

где $\alpha = \frac{1}{2} arctg \left[-\frac{H_x^2 sin2\varphi_x + H_y^2 sin2\varphi_y + H_z^2 sin2\varphi_z}{H_x^2 cos2\varphi_x + H_y^2 cos2\varphi_y + H_z^2 cos2\varphi_z} \right].$

Использование измерений относительных фаз составляющих магнитного поля позволяет существенно упростить измерительное устройство, поскольку не требует канала передачи фазы тока от источника поля к измерителю и синхронизации измерительного и генераторного устройств.

Составляющие эллипса поляризации магнитного поля при исследовании проводящих свойств неоднородных сред имеют такое же разрешение, как и декартовые составляющие поля, поскольку являются пространственным инвариантом. При дистанционных индукционных зондированиях слоисто-неоднородных сред с источником поля в виде вертикального магнитного диполя удельная электропроводность однородного полупространства в ближней (низкочастотной) зоне определяется по отношениям составляющих магнитного поля или полуосей эллипса поляризации по аналогичным формулам [Светов 1973]

$$\sigma = \frac{4}{\omega \mu_0 r^2} \frac{H_r}{H_z} = \frac{4}{\omega \mu_0 r^2} \frac{H_b}{H_a}.$$

Измерения полуосей эллипса поляризации магнитного поля в вертикальной плоскости, проходящей по линии источник-точка измерения, обоснованы для изучения слоисто-неоднородных сред. При поисках локальных проводящих объектов, которыми являются месторождения проводящих руд, необходимы измерения пространственных составляющих эллипса поляризации, поскольку симметрия магнитного поля нарушается.

Изучение закономерностей изменения пространственного эллипса поля-

ризации магнитного поля в среде с 3D проводящими объектами выполнено с помощью пакета программ D6_EH. По результатам расчета составляющих поля определяются дополнительные характеристики, отражающие перераспределение поля вблизи проводящего 3D объекта: фазовые углы, тензор импеданса, вектор плотности энергии Умова-Пойнтинга, отношения составляющих поля и т.п.

Результаты математического моделирования приведены на рис. 58 в виде планов изолиний отношений полуосей полного эллипса поляризации магнитного поля *Ha*/*Hb*, создаваемого током I = 1 А в незаземленном контуре размером 200x200 м, с центром, расположенным в начале координат.

Ряд частот f от 125 до 275 Гц выбран как нечетные гармоники основной рабочей частоты 25 Гц.

Проводящий 3D-объект в виде прямоугольного параллелепипеда имеет размеры по осям 150x200x50 м, глубина погружения центра h = 150 м. Проекция 3D тела на поверхность z = 0 изображена прямоугольником. Удельное сопротивление полупространства ρ_o = 1000 Ом·м, проводящего объекта ρ = 1 Ом·м. Высота плоскости наблюдений z = 50 м.

Кроме соотношения полуосей эллипса поляризации H_b/H_a удобной характеристикой для выделения локальных аномалий электропроводности при измерениях магнитного поля при площадной съемке является величина эксцентриситета эллипса $e = \sqrt{1 - H_b^2 / H_a^2}$, которая уменьшается с удалением точки наблюдений от источника в ограниченных пределах e =1 ÷ 0.

На рис. 58 вверху приведены планы изолиний отношений полуосей эллипса поляризации магнитного поля H_a/H_b над проводящим 3D-объектом в виде прямоугольного параллелепипеда на частоте f = 75 Гц. На рис. 58 внизу приведены графики отношений полуосей H_a/H_b по профилю Y=0 над 3D-объектом (сплошные) и над однородным полупространством (штриховые) на частотах f =75, 125, 175 Гц (шифр кривых).

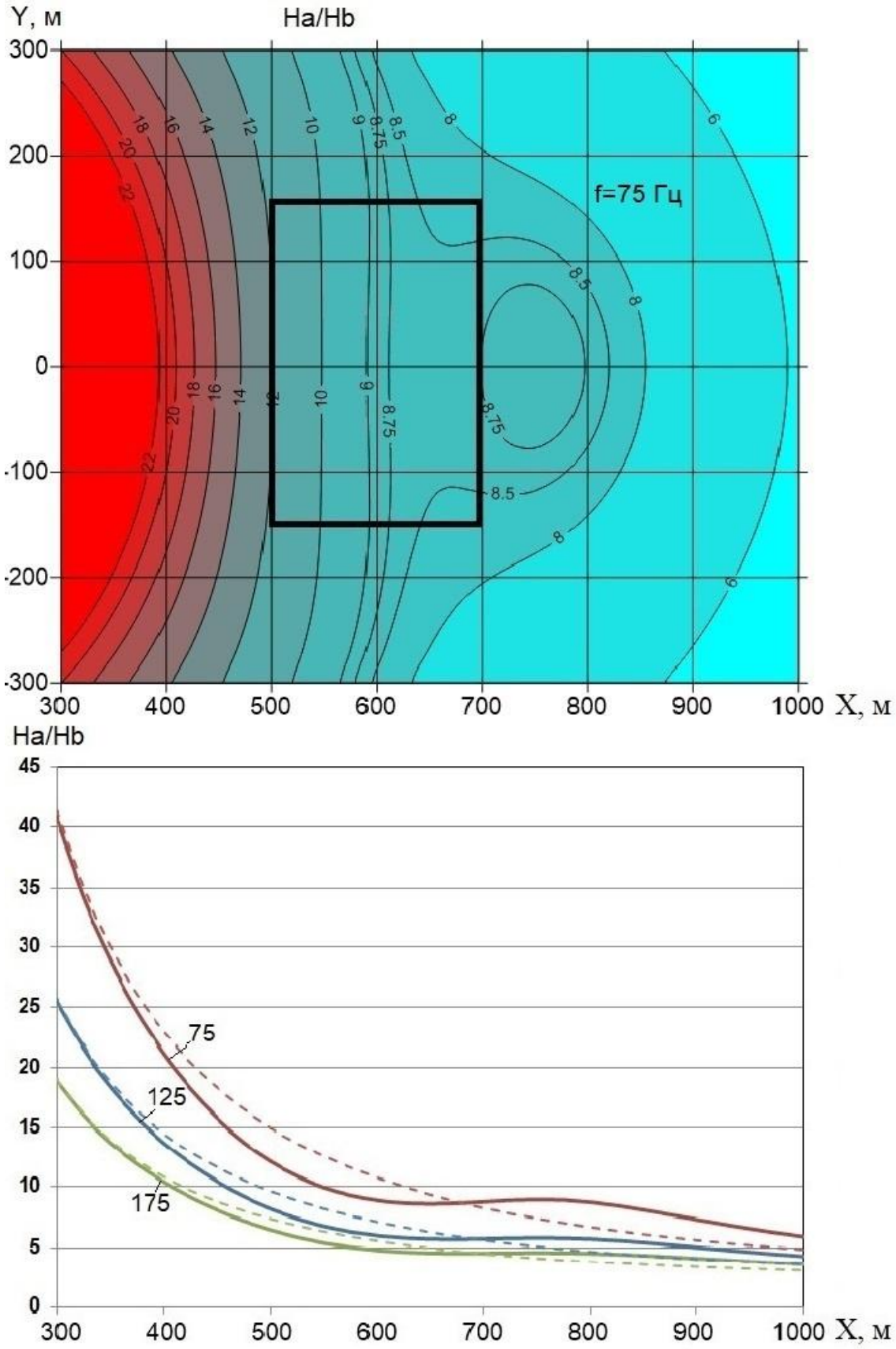


Рис. 58. Вверху - планы изолиний *Ha*/*Hb* над 3D-проводящим объектом на частоте 75 Гц. Внизу – графики *Ha*/*Hb* по профилю Y=0 над 3D-объектом (сплошные) и над однородным полупространством (штриховые) на частотах *f* =75, 125, 175 Гц (шифр кривых)

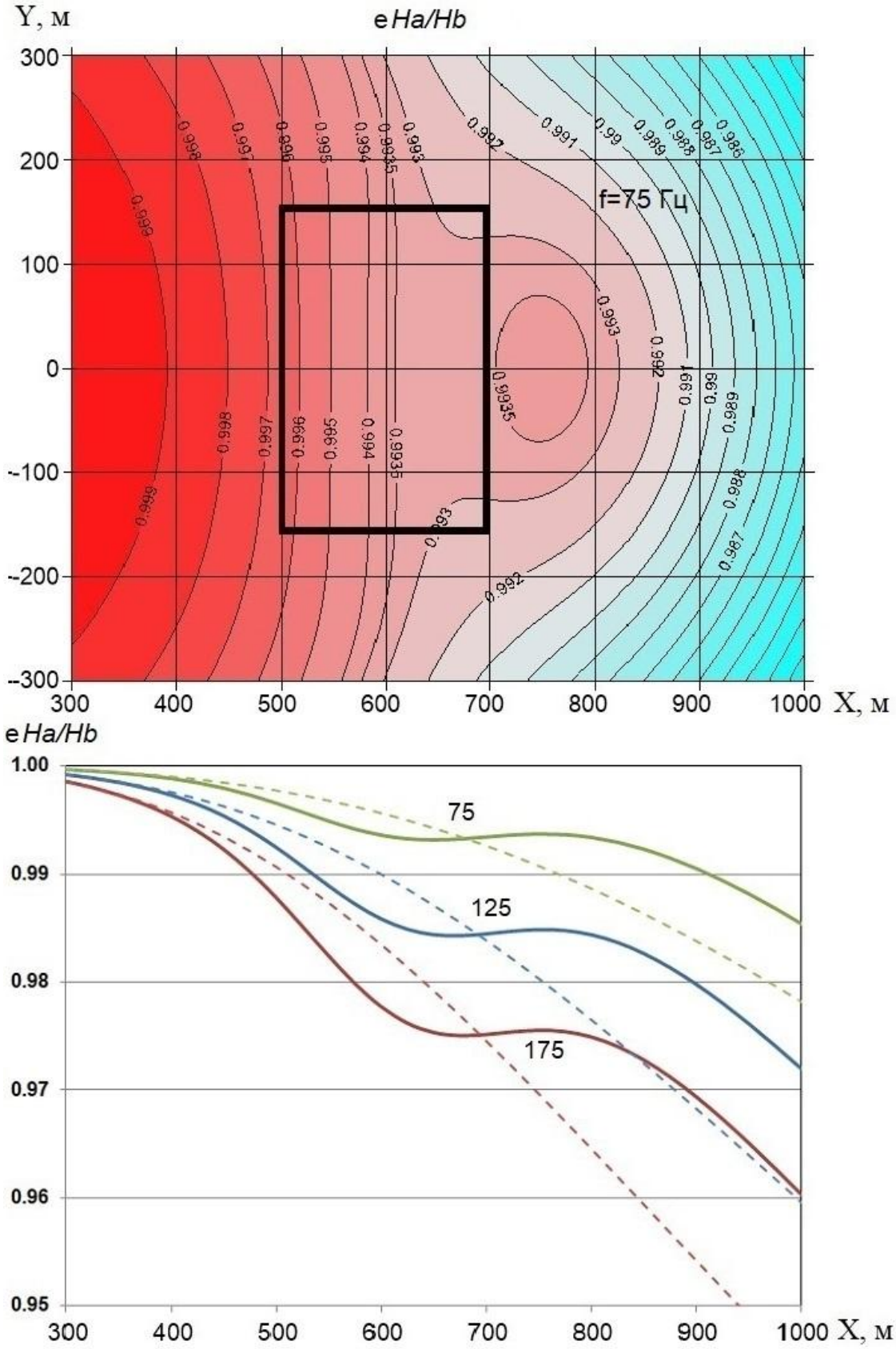


Рис. 59. Вверху - планы изолиний эксцентриситета над 3D-проводящим объектом на частоте 75 Гц. Внизу – графики эксцентриситета по профилю Y=0 над 3D-объектом (сплошные) и над однородным полупространством (штриховые) на частотах f = 75, 125, 175 Гц (шифр кривых)

На рис. 59 вверху приведены планы изолиний эксцентриситета эллипса поляризации над проводящим 3D-объектом.

Графики внизу на рис. 59 - кривые эксцентриситета эллипса по профилю Y = 0 над 3D-объектом (сплошные) и над однородным полупространством (штриховые) на частотах f = 75, 125, 175 Гц (шифр кривых).

Изолинии отношения полуосей эллипса поляризации H_a/H_b и эксцентриситета над проводящим однородным полупространством представляют собой замкнутые кривые, близкие к окружности относительно центра источника, величины которого убывают с удалением от источника. 3D-объект отмечается на планах изолиний H_a/H_b и эксцентриситета эллипса в виде локальных искажений изолиний над проекцией проводящего объекта.

Кривые отношения H_a/H_b и эксцентриситета эллипса на графиках рис. 53-54 над 3D-объектом представляют собой аномалии сложной формы, что объясняется суперпозицией магнитных полей от аномальных токов проводимости и токов индукции в проводящем теле.

Величины аномалий магнитного поля от локального проводника существенно зависят от частоты тока в источнике и контрастности удельных сопротивлений 3D объекта и вмещающей среды.

Из приведенных выше графиков поля на различных частотах рис. 58-59 видно, что для достижения значимого аномального эффекта при контрастности удельных сопротивлений 3D-объекта и среды 1: 500 над проводящим локальным объектом можно ограничиться достаточно низкими частотами исследований.

Для проверки работоспособности метода были проведены экспериментальные измерения методом незаземленной петли (НП-Н) на медно-колчеданном месторождении «Чусовское» Среднего Урала. В качестве источника поля была использована незаземлённая петля размером 100×100 м с силой тока I = 20 А. Форма тока — прямоугольная, что позволило выполнить измерения на нескольких высших гармониках.

Частота основной гармоники выбрана равной 25 Гц, что позволило мак-

симально разнести по частоте основную и высшие гармоники полезного сигнала от частоты помехи промышленной сети 50 Гц. В качестве регистратора сигнала был использован измеритель многочастотного комплекса индукционного зондирования [Арзамасцев и др., 2018] с трёхкомпонентным индукционным датчиком, при этом измерения выполнялись на нескольких гармониках основной частоты в частотном диапазоне 25÷2700 Гц.

Результаты измерений в виде отношения полуосей H_a/H_b на нескольких частотах по одному из профилей приведены на рис. 60.

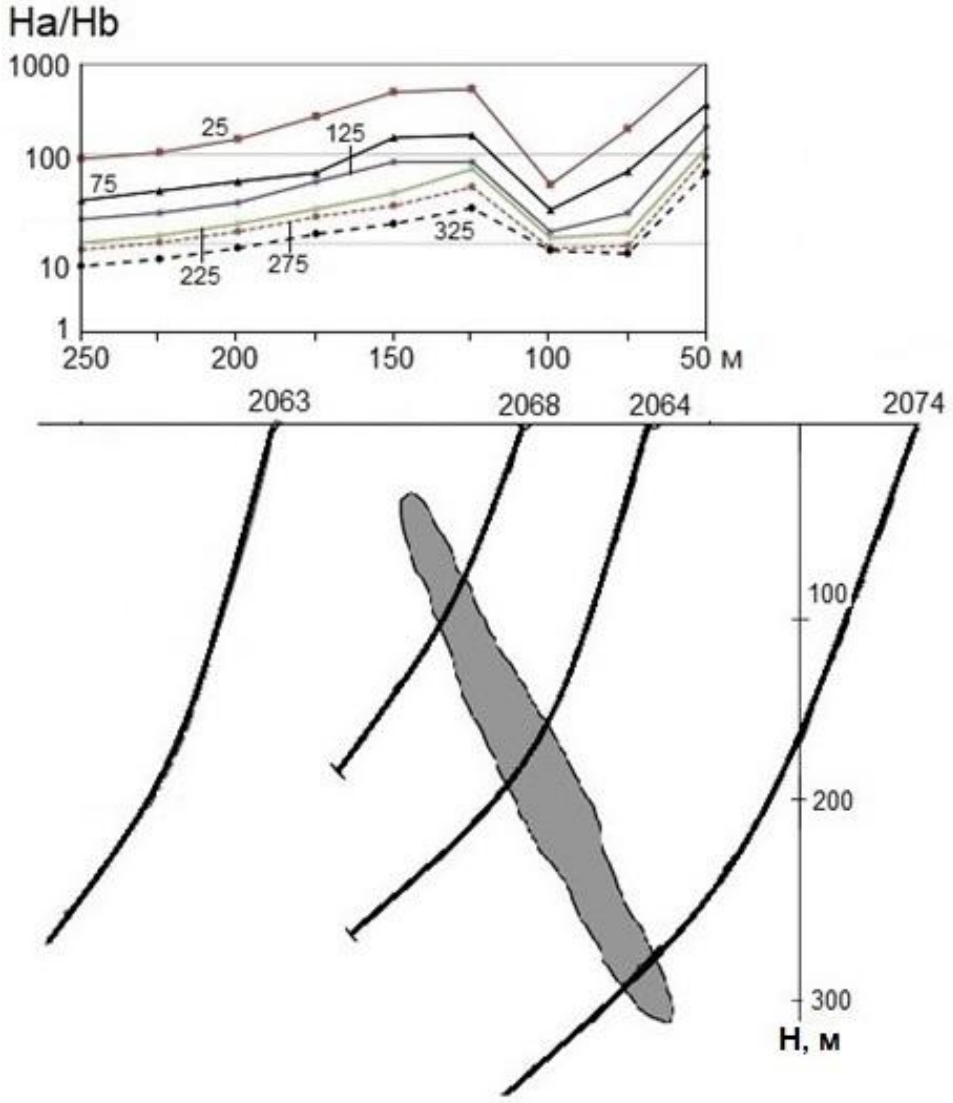


Рис. 60. Результаты измерений методом НП-Н на месторождении «Чусовское». Вверху – графики отношения полуосей H_a/H_b (шифр кривых – частота [Гц]). Внизу – проекции скважин и рудного тела на разведочную линию «восток-запад»

Проводящее тело хорошо выделяется по локальным аномалиям над руд-

ным телом месторождения, что подтверждает работоспособность метода.

С ростом частоты профильные кривые отношения полуосей H_a/H_b над рудным телом (рис. 60 вверху) становятся менее рельефными на фоне спада нормального магнитного поля источника.

На рис. 61 приведены кривые кажущегося удельного сопротивления однородного полупространства $\rho_к$ (Ом·м), соответствующие измеренным величинам полуосей эллипса магнитного поля H_a и H_b по методике, предложенной в работах [Вешев, 1971; Якубовский, 1988].

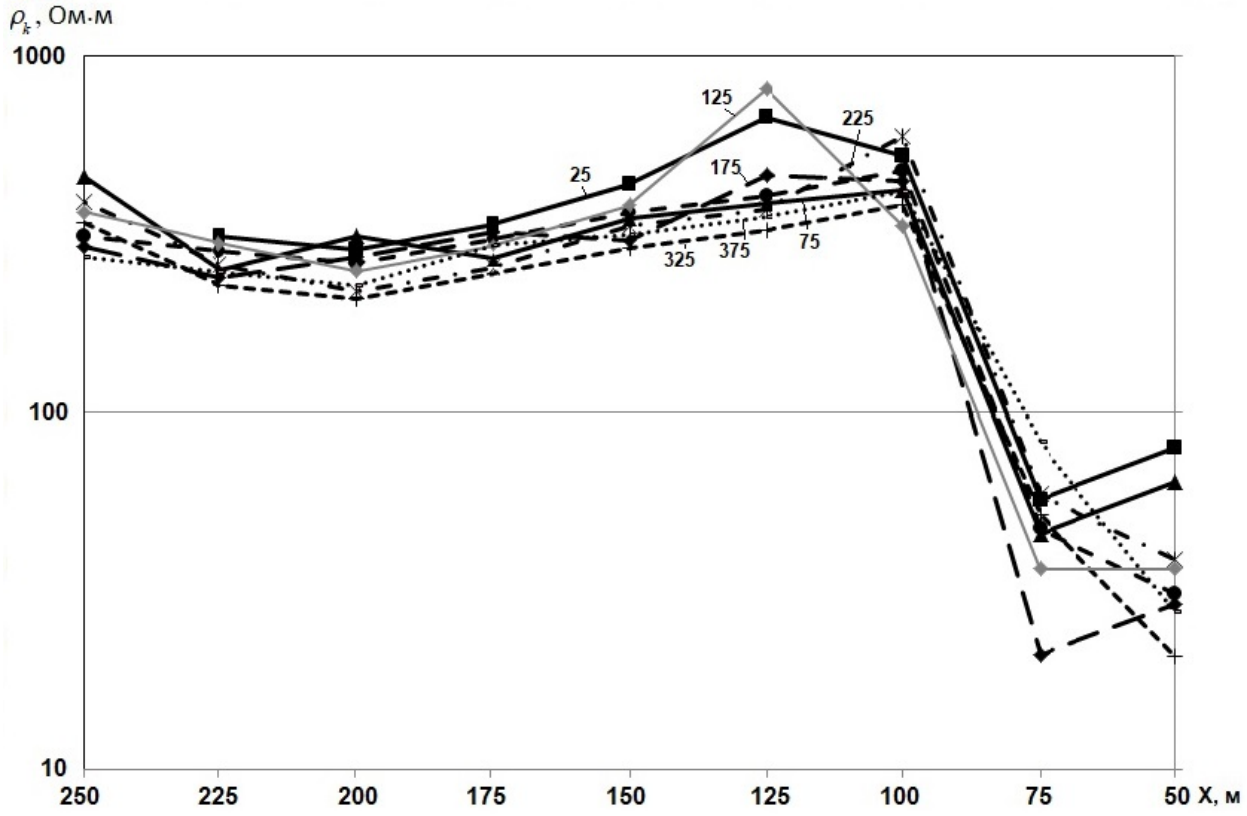


Рис. 61. Графики $\rho_к$, Ом·м , соответствующие отношению полуосей H_a/H_b для однородного полупространства на месторождении «Чусовское» (шифр кривых – частота *f*, Гц).

Выделению аномалии магнитного поля на высоких частотах помогают величины эксцентриситета *e*, которые резко зависят от изменения величины малой полуоси эллипса поляризации магнитного поля (рис. 62).

Рассмотренный подход может найти применение в широком классе исследований: в наземном варианте сокращается время и трудозатраты на проведение съёмки и повышается точность и воспроизводимость результатов; в

набирающем в настоящее время актуальность варианте воздушной съёмки с применением беспилотных летающих аппаратов (БПЛА) отпадает необходимость ориентировки измерительной системы в воздухе, что значительно упрощает конструкцию и уменьшает несомую БПЛА нагрузку. Метод может найти применение в скважинном варианте электромагнитных исследований.

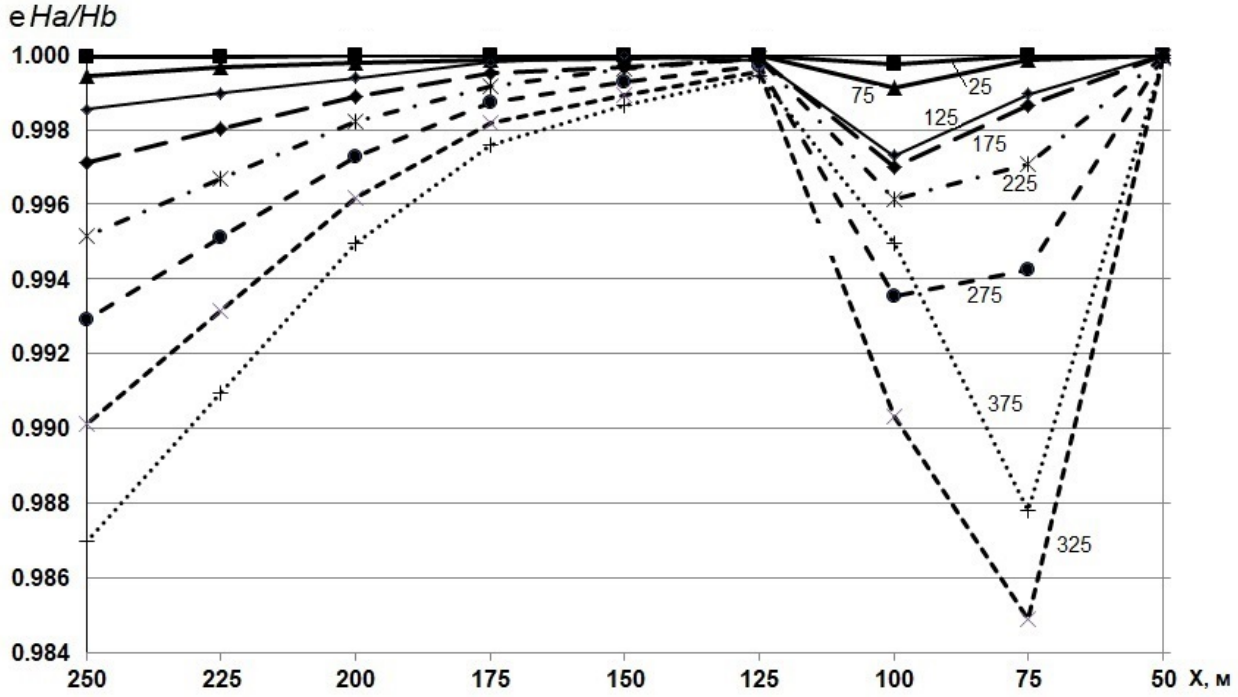


Рис. 62. Графики эксцентриситета эллипса поляризации магнитного поля на месторождении «Чусовское» (шифр кривых – частота [Гц]).

Полученные материалы позволяют сделать следующие выводы:

- измерения полуосей полного эллипса поляризации магнитного поля в индуктивной электроразведке имеют преимущество перед измерениями составляющих магнитного поля, поскольку не зависят от пространственной ориентации датчиков составляющих поля, что полностью исключает методическую погрешность измерений;

- использование измерений относительных фаз составляющих магнитного поля позволяет существенно упростить измерительное устройство для определения полуосей полного эллипса поляризации, поскольку не требует канала передачи фазы тока от источника поля к измерителю.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная монография посвящена теоретическому описанию рассеяния низкочастотного гармонического электромагнитного поля на локальных проводящих объектах, программно-алгоритмической реализации полученного интегрального уравнения рассеяния поля с примерами практического применения.

Для описания воздействия на заряды со стороны электрического и переменного магнитного поля наряду с силами Кулона и Ампера введено понятие силы Фарадея. Явление поляризации малого проводящего объекта рассмотрено как возникновение под действием электрического и магнитного полей в центре элементарного объема вторичных электрических и магнитных диполей. При этом момент вторичного электрического диполя пропорционален аномальной электропроводности и напряженности электрического поля. Момент вторичного магнитного диполя пропорционален аномальной электропроводности и скорости изменения потока магнитного поля. Физико-математическое описание рассеяния гармонического электромагнитного поля на 3D проводнике выполнено как суперпозиция аномальных электромагнитных полей вторичных электрических и магнитных диполей (метод моментов).

Полученное уравнение рассеяния гармонического электромагнитного поля учитывает парные и перекрестные эффекты физических полей, возникающие в проводящем 3D объекте:

- парный эффект полей заключается в учете действия двух сил – Кулона и Фарадея, действующих на заряды со стороны электрического и переменного магнитного полей;
- перекрестный эффект полей заключается в создании магнитного поля электрическим полем (токами) по закону Био-Савара и электрического поля – пе-

ременным магнитным полем по закону Фарадея.

Для численных расчетов приведена система линейных алгебраических уравнений, к которой путем дискретизации сводится уравнение рассеяния гармонического электромагнитного поля и проанализированы способы численной реализации.

С помощью проведенного математического моделирования проведен анализ пространственно-частотных зависимостей поведения электрического и магнитного полей в зависимости от типа возбуждения проводящего тела внешним электрическим или магнитным полем, а также при совместном возбуждении полем стороннего источника.

Дано сравнение результатов выполненного математического моделирования и физических экспериментов по изучению закономерностей рассеяния электромагнитного поля на проводящих объектах в непроводящей вмещающей среде.

Разработано специализированное программное обеспечение в виде пакета программ применительно к геофизическим методам электроразведки переменным током. Описаны примеры практического применения математического моделирования при проектировании новых методов электроразведки, обосновании новых методик выполнения измерений, а также при поисках месторождений проводящих руд воздушными и наземными методами индуктивной электроразведки.

ПРИЛОЖЕНИЯ.

Приложение 1. Векторные волновые уравнения

В теории электромагнитных полей для облегчения решения уравнений электродинамики вводятся различные вспомогательные функции. Так, из уравнения непрерывности магнитного поля в проводящей немагнитной среде $div\,\boldsymbol{H}=0$, указывающем на его вихревой характер, источником которого служит электрический ток элементарного источника (электрического диполя), а также векторного соотношения $div\,rot\,\boldsymbol{A}=0$ следует, что можно ввести вспомогательную векторную функцию

$$\boldsymbol{H}=rot\boldsymbol{A}. \qquad (1)$$

где вектор $\boldsymbol{A}$ называется вектор–потенциалом электрического типа [А].

При этом предполагается, что функция $\boldsymbol{A}$ всюду непрерывна и конечна, кроме источника и бесконечности. Вне источника вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ удовлетворяет такому же волновому уравнению, что и векторы $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$, а в точке источника $\boldsymbol{r}$ величине момента $\boldsymbol{M}$ источника:

$$\Delta\boldsymbol{A}-k^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{M}=Id\boldsymbol{l}$ – момент элементарного электрического диполя [А*м]; $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ – дельта–функция Дирака [м$^{-3}$]; $k=\sqrt{j\omega\mu_o\sigma}$ – волновое число среды [м$^{-1}$].

С помощью вектор-потенциала $\boldsymbol{A}$ можно определить электрическое поле. Для доказательства возьмем *rot* от обеих частей выражения (1)

$$rot\boldsymbol{H}=rot\,rot\boldsymbol{A}=grad\,div\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A}$$

и подставим это выражение в первое уравнение Максвелла (закон Био-Савара)

$$rot\boldsymbol{H}=\sigma\boldsymbol{E}\,.$$

С учетом (2) для точек вне источника $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'$ получим

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sigma}rotrot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sigma}\left\{grad\,div\boldsymbol{A}-k^2\boldsymbol{A}\right\}. \qquad (3)$$

Для определения электрического поля индукционного происхождения, необходимо исходить из уравнения $div\boldsymbol{E}=0$, указывающего на вихревой харак-

тер переменного электрического поля, источником которого служит переменное магнитное поле электрического тока в элементарном источнике (магнитный диполь).

Введем вектор–потенциал магнитного типа $\boldsymbol{A}^*$ [В], используя тождество $div\, rot\, \boldsymbol{A}^* = 0$, представив вектор $\boldsymbol{E}$ как

$$\boldsymbol{E} = rot\boldsymbol{A}^*. \qquad (4)$$

По аналогии с предыдущим выводом, можно показать, что вектор–потенциал магнитного типа удовлетворяет волновому уравнению, подобному (2)

$$\Delta\boldsymbol{A}^* - k^2\boldsymbol{A}^* = -j\omega\mu_o\boldsymbol{M}^*\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \qquad (5)$$

где $\boldsymbol{M}^* = IS\boldsymbol{n}$ – момент элементарного магнитного диполя [А*м^2].

Напряженность магнитного поля с помощью вектор-потенциала магнитного типа $\boldsymbol{A}^*$ можно определить из второго уравнения Максвелла (закона Фарадея)

$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = -j\omega\mu_o\boldsymbol{H}$$

из которого, с учетом (5), для точек вне источника $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$ получим

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_o} rot\, rot\boldsymbol{A}^* = -\frac{1}{j\omega\mu_o}(grad\, div\boldsymbol{A}^* - k^2\boldsymbol{A}^*). \qquad (6)$$

Сравнивая пары формул (1) и (4), (3) и (6), (2) и (5) можно заметить тождественность этих формул при следующей замене:

$$\boldsymbol{E} \text{ на } \boldsymbol{H},\ \boldsymbol{M} = Id\boldsymbol{l} \text{ на } \boldsymbol{M}^* = -j\omega\mu_o IdS\boldsymbol{n},\ \ \sigma_0 \text{ на } -j\omega\mu_0.,\ \boldsymbol{A} \text{ на } \boldsymbol{A}^*. \qquad (7)$$

Эта аналогия широко используется при решении ряда задач ЭМ полей. Уравнения (2) и (5) называют волновыми уравнениями Гельмгольца.

Решение волнового векторного уравнения Гельмгольца.

Решения многих прямых задач методов переменных электромагнитных полей сводится к решению волнового уравнения для вектор–потенциала электрического или магнитного типа в зависимости от вида источника. В последующем по формулам (1) и (3) или (4) и (6) рассчитываются напряженности полей.

Приведем решение волнового уравнения (2) для электрического вектор–потенциала $\boldsymbol{A}$ в безграничной среде с электропроводностью σ для источника в виде электрического диполя с моментом $\boldsymbol{M}$. Запишем уравнение в матричном виде

$$\frac{\partial^2}{\partial r_m^2} A_m(\boldsymbol{r}) - k^2 A_n(\boldsymbol{r})\delta_{mn} = \delta_{mn}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')M_n(\boldsymbol{r}'), \qquad (8)$$

где $\delta_{mn} = \begin{cases} 0, \ при \ \ m \neq n \\ 1, \ при \ \ m = n \end{cases}$ – символ Кронекера,

$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ – дельта–функция Дирака,

m и n – индексы составляющих векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{M}$.

Определим прямое и обратное преобразование Фурье с помощью соотношений

$$F(\boldsymbol{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\boldsymbol{r})\exp\{i\boldsymbol{pr})\}d\boldsymbol{r}, \quad F(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} F(\boldsymbol{p})\exp\{-i\boldsymbol{pr})\}d\boldsymbol{p}.$$

Для Фурье–образа вектор–потенциала $A_m(\boldsymbol{p})$ из (8) получим выражение вида

$$-\left[(p^2+k^2)\delta_{mn}\right]A_m(\boldsymbol{p}) = \delta_{mn}M_n,$$

откуда

$$A_m(\boldsymbol{p}) = -\frac{M_m}{p^2+k^2}.$$

Выполняя обратное преобразование Фурье в сферических координатах

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{p^2+k^2}\int_0^{\pi} \sin\theta e^{-ipr\cos\theta} d\theta = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{p^2 dp}{p^2+k^2}\int_1^{-1} e^{-iprl} dl =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2 ir}\int_0^{\infty}\frac{(e^{ipr}-e^{-ipr})pdp}{p^2+k^2} = -\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{\infty}\frac{p\sin pr}{p^2+k^2}dp = -\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+(kr)^2}dx = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-kr}}{r}$$

где $e^{ix} = i\sin x$, $\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+z^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-z}$.

В результате получим решение в виде:

$$\boldsymbol{A(r)} = -\frac{\boldsymbol{M}}{4\pi}\frac{e^{-kR}}{R}, \quad \text{где } R = \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|. \tag{9}$$

По формулам (1) и (3) можно определить напряженности электрического и магнитного полей электрического диполя.

Аналогично можно решить уравнение для магнитного вектор–потенциала, которое будет иметь вид:

$$\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu_o \frac{\boldsymbol{M}^{*}}{4\pi}\frac{e^{-kR}}{R}. \tag{10}$$

Напряженности электрического и магнитного полей магнитного диполя определяются по формулам (4) и (6).

Введение вспомогательных электрического и магнитного вектор–потенциалов значительно упрощает решения задач.

Решение уравнения Пуассона.

Частным случаем уравнения (2) является стационарный режим электромагнитного поля $k_o = 0$ (уравнение Пуассона)

$$\Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{11}$$

решением которого является интеграл Пуассона

$$\boldsymbol{A(r)} = -\frac{\boldsymbol{M}}{4\pi}\frac{1}{\boldsymbol{R}}. \tag{12}$$

Применим это решение для нахождения электрического потенциала стационарного точечного источника.

Из электростатической теоремы Гаусса в дифференциальной форме $div\,\boldsymbol{D} = \rho$ следует, что электрический потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon_o \varepsilon},$$

где $\boldsymbol{D} = -\varepsilon_{\boldsymbol{o}}\varepsilon \cdot gradU$ – электрическая индукция, Кл/м^2, ε_o – электрическая постоянная, Ф/м, ε – диэлектрическая проницаемость среды, ρ – объемная плотность зарядов, Кл/·м^3.

Для получения решения необходимо воспользоваться представлением

объемной плотности зарядов для сосредоточенного точечного источника в виде $\rho(\boldsymbol{r}) = q(\boldsymbol{r}_o)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_o)$

$$\Delta U(\boldsymbol{r}) = -\frac{q(\boldsymbol{r}_o)}{\varepsilon_0 \varepsilon}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_o).$$

В результате получим выражение для стационарного электрического потенциала для точек вне точечного заряда в виде

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon}\int_V q(\boldsymbol{r}')\frac{\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_o)}{R}d\boldsymbol{r}' = \frac{q(\boldsymbol{r}_o)}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon}\frac{1}{R}, \text{ где } R = \left|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_O\right|. \qquad (13)$$

Решение дифференциальных уравнений методом функции Грина

Представим систему дифференциальных уравнений для векторной функции $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ и известной векторной функции $f_\alpha(\boldsymbol{r})$, определенных в конечной области $\boldsymbol{r} \in V$, в виде:

$$D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r})\,\psi_\beta(\boldsymbol{r}) = f_\alpha(\boldsymbol{r}); \quad \alpha,\beta = 1, 2, 3; \qquad (14)$$

где: $D(\boldsymbol{r})$ - линейный дифференциальный оператор порядка *n*.

Решение для искомой функции $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ можно представить в виде операторного соотношения

$$\psi_\beta(\boldsymbol{r}) = Q_{\beta\alpha}(\boldsymbol{r})\,f_\alpha(\boldsymbol{r}), \qquad (15)$$

где: $Q(\boldsymbol{r})$ – оператор, обратный оператору $D(\boldsymbol{r})$.

Введем тензорную функцию Грина $G_{\beta\alpha}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}')$, являющуюся решением уравнения (14) с правой частью в виде дельта-функции Дирака

$$D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r})G_{\beta\alpha}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\delta_{\alpha\beta}, \qquad (16)$$

представляющую собой отклик на единичное воздействие.

Тогда решение уравнения (14) может быть представлено в виде

$$\psi_\beta(\boldsymbol{r}) = \int_V G_{\beta\alpha}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}')\,f_\alpha(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'. \qquad (17)$$

Для нахождения функции Грина в виде решения дифференциального уравнения (16) используется обратное Фурье-преобразование обратного дифференциального оператора $D^{-1}(\boldsymbol{p})$

$$G_{\beta\alpha}(\boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}') = D^{-1}_{\beta\alpha}(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,. \qquad (18)$$

Решение волнового уравнения

Волновое уравнение для тензорной функции Грина вида (16), используемой для расчета искомой функции по формуле (17), имеет вид

$$\{rot\ rot + k_o^2\delta_{\alpha\beta}\}G_{\beta\gamma}(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})\delta_{\alpha\gamma}\,. \qquad (19)$$

Запишем это уравнение в матричном виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\delta_{\alpha\beta} + k_0^2\delta_{\alpha\beta}\right)G_{\beta\gamma}(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})\delta_{\alpha\gamma}\,,$$

где использовано

$$rot\ rot\boldsymbol{A} = grad\ div\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}\,.$$

Выполнив прямое преобразование Фурье, перейдем к Фурье–образу

$$[(p^2 + k_0^2)\delta_{\alpha\beta} - p_\alpha p_\beta]G_{\beta\gamma}(\boldsymbol{p}) = \delta_{\alpha\gamma}\,, \qquad (20)$$

который имеет обобщенный матричный вид

$$A_{\alpha\beta}G_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}\,.$$

Функцию Грина будем искать в виде $G_{\beta\gamma} = A^{-1}_{\beta\alpha}\cdot\delta_{\alpha\gamma}$.

Обратную матрицу определим, используя свойство $A^{-1}_{\beta\alpha}\cdot A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$.

Представим обратную матрицу A^{-1} в виде:

$$A^{-1}_{\beta\gamma} = \left[c\cdot\delta_{\beta\gamma} + d\cdot p_\beta p_\gamma\right],$$

где c и d – неизвестные постоянные.

Перемножая матрицы

$$[(p^2 + k_0^2)\delta_{\alpha\beta} - p_\alpha p_\beta]\cdot[c\cdot\delta_{\beta\gamma} + d\cdot p_\beta p_\gamma] = \delta_{\alpha\gamma}\,,$$

получим, используя $\delta_{\alpha\beta}\cdot\delta_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}$ и $\delta_{\alpha\beta}p_\beta p_\gamma = p_\alpha p_\gamma$

$$(p^2 + k_0^2)c\cdot\delta_{\alpha\gamma} - p_\alpha p_\gamma(c - dk_o^2) = \delta_{\alpha\gamma}\,.$$

Составив два уравнения с двумя неизвестными:

1. при $\alpha \neq \gamma$: $c - d\cdot k_o^2 = 0$, т.е. $d = \dfrac{c}{k_o^2}$

2. при α = γ: $(p^2 + k_0^2)\cdot c = 1$,

определим постоянные

$$c = \frac{1}{p^2 + k_o^2} \text{ и } d = \frac{c}{k_o^2} = \frac{1}{k_o^2 (p^2 + k_o^2)}.$$

В результате имеем для Фурье–образа:

$$G_{\beta\gamma} = A^{-1}_{\beta\alpha}\cdot\delta_{\alpha\gamma} = \frac{p_\beta p_\gamma}{k_o^2(p^2 + k_o^2)} + \frac{\delta_{\beta\gamma}}{p^2 + k_o^2} = \frac{1}{k_o^2(p^2 + k_o^2)}\left(p_\beta p_{\ \gamma} + k_o^2\delta_{\beta\gamma}\right).$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, аналогичное выводу (9), получим решение вида

$$G_{\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi k_o^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} + k_o^2\delta_{\beta\gamma}\right)\frac{e^{-k_o R}}{R}. \qquad (21)$$

Сводная таблица решений дифференциальных уравнений второго порядка

Дифференциальное уравнение	Решение
Уравнение Пуассона $\Delta A_m(\mathbf{r}) = \delta_{mn}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')M_n(\mathbf{r}')$	$A_m(\mathbf{r}) = -\frac{M_n}{4\pi}\frac{1}{R}\delta_{mn}$
Уравнение Гельмгольца $\Delta A_m(\mathbf{r}) - \delta_{mn}k_o^2 A_n(\mathbf{r}) = \delta_{mn}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')M_n(\mathbf{r}')$	$A_m(\mathbf{r}) = -\frac{M_n}{4\pi}\frac{e^{-k_o R}}{R}\delta_{mn}$
Волновое уравнение $(rot\ rot + \delta_{\alpha\beta}k_o^2)G_{\beta\gamma}(\vec{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\alpha\gamma}$ или $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\delta_{\alpha\beta} + k_0^2\delta_{\alpha\beta}\right)G_{\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})\delta_{\alpha\gamma}$	$G_{\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi k_o^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} + k_o^2\delta_{\beta\gamma}\right)\frac{e^{-k_o R}}{R}$

Приложение 2. Обозначения и размерности электромагнитных физических величин.

q	Кл	Электрический заряд
U	В	Электрический потенциал
$\boldsymbol{D}$	Кл/м^2	Электрическая индукция
$\boldsymbol{E}$	В/м	Напряженность электрического поля
I	А	Сила тока
$\boldsymbol{i}$	А/м^2	Плотность тока
σ	См/м	Удельная электропроводность
ρ	Ом·м	Удельное электрическое сопротивление
$\boldsymbol{A}$	А	Вектор-потенциал электрического типа
$\boldsymbol{A}^*$	В	Вектор-потенциал магнитного типа
$\boldsymbol{M}_Э$	Кл*м	Момент электростатического диполя
$\boldsymbol{M}_E$	А*м	Момент электрического диполя
$\boldsymbol{M}_H$	А*м^2	Момент магнитного диполя
f	Гц	Частота
ω	Сек$^{-1}$	Круговая частота
k	м$^{-1}$	Волновое число
ε	-	Относительная диэлектрическая проницаемость
ε_o	Ф/м	Электрическая постоянная = $8.85\cdot10^{-12}$
ρ	Кл/м^3	Объемная плотность зарядов
$\boldsymbol{B}$	Тл	Магнитная индукция
Φ	Вб	Поток магнитной индукции
$\boldsymbol{H}$	А/м	Напряженность магнитного поля
μ_o	Гн/м	Магнитная постоянная = $4\pi\cdot10^{-7}$
$\boldsymbol{P}$	В/м	Вектор поляризации

Литература

Альпин Л.М., Даев Д.С., Каринский А.Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. М.: Недра. 1985. 407 с.

*Анго А.*Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1965. 652 с.

Арзамасцев Е.В., Астафьев П.Ф., Байдиков С.В., Коноплин А.Д., Ратушняк А.Н. Индукционные зондирования слоистых структур. // Известия ВУЗов. Горный журнал. 2020. № 4. С.21–31.

Арзамасцев Е.В., Коноплин А.Д., Астафьев П.Ф. Многочастотный комплекс фазочувствительного частотного индукционного зондирования. // Датчики и системы. 2018. № 5. С. 55–60.

Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 256 с.

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учебное пособие. М.: Наука, 1987. 600 с.

Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Модели и методы магнитотеллурики. М.: Научный мир, 2009. 680 с.

Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973, 721 с.

Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972. 688 с.

Бурсиан В.Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Л.: Недра, 1972. 368 с.

Вешев А.В. Электропрофилирование на постоянном и переменном токе. Л.: Недра, 1980. 391 с.

Вешев А.В., Ивочкин В.Г., Игнатьев Г.Ф. Электромагнитное профилирование. Л.: Недра, 1971. 216 с.

Вешев А.В., Любцева Е.Ф., Самосюк Г.П. Нормальное поле незаземленной петли. // Вопросы геофизики. 1967. Вып. 17. С.23-56.

Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 256 с.

Вычислительные методы в электродинамике. Под, ред. Р. Митры. М.: Мир,

1977. 488 с.

Гасаненко Л.Б. Нормальное поле вертикального гармонического низкочастотного магнитного диполя. // Уч. зап. ЛГУ. № 249. Вып 10. 1958. С.15-38.

Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М. - Л.: Изд. АН СССР, 1948. 727 с.

Детлаф А. А., Яворский Б. М., Милковская Л. Б.. Курс физики. Электричество и магнетизм. М.: Высшая школа, 1977. Т.2. 375 с.

Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 703 с.

Дивильковский М.А. Задача о шаре, помещенном в однородное электрическое или магнитное поле // ЖТФ. 1939. Том 9. № 5. С. 433–443.

Дмитриев В.И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: МГУ, 1969. 131 с.

Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М., МАКС Пресс, 2008. 312 с.

Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод расчета поля постоянного тока в неоднородных проводящих средах. // Вычислительные методы и программирование. М.: МГУ, 1973. Вып. XX. С.175-186.

Дякин В.В., Сандовский В.А. Задачи электродинамики в неразрушающем контроле. Екатеринбург: УрО РАН. 2008. 390 с.

Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: МГУ, 1992. 182 с.

Ермохин К.М. Расчет полей постоянного тока в трехмерных неоднородных средах. Деп. в ВИНИТИ. 1985. № 6732 - В85. 9 с.

Жданов М.С. Геофизическая электромагнитная теория и методы. М.: Научный мир. 2012. 647 с.

Жданов М.С., Варенцов И.М., Голубев Н.Г., Крылов В.А. Методы моделирования электромагнитных полей. (Материалы международного проекта COMMEMI). М.: Наука. 1990. 198 с.

Заборовский А.И. Переменные электромагнитные поля в электроразведке. М., МГУ, 1960, 186 с.

Заборовский А.И. Электроразведка. М., Гостоптехиздат, 1963, 423 с.

Захаров В.Х. Дипольное индуктивное профилирование с амплитудно-фазовыми измерениями при поисках и разведке сульфидных руд. Л.: Недра, 1967. 156 с.

Захаров Е. В., Ильин И. В. Метод расчета электромагнитных полей в плоско-параллельной слоистой среде с локальными неоднородностями // Вычисл. методы и программирование. М.: МГУ, 1971. В. XVI. С. 83-108.

Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: ИЛ, 1958. 502 с.

Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука. 1985. 336 с.

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6. Линейная алгебра. М.: Наука, 1974. 296 с.

*Ильинский А.*С., *Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. Уч. пособие для вузов. М.: Высшая школа. 1991. 224 с.

Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно–неоднородных средах. М.: Мир, т.1, 1981. 280 с.

Калашников С.Г. Электричество. М.: Физматлит, 2003. 624 с.

Каменецкий Ф.М., Кауфман А.А., Якубовский Ю.В. О выборе оптимальной частоты при индуктивных методах разведки. – Изв. АН СССР. Сер. Геофиз., 1957, № 2, с. 200-210.

Кауфман А.А. Введение в теорию геофизических методов. Ч.2. Электромагнитные поля. М.: Недра-Бизнесцентр, 2000. 483 с.

Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н. Моделирование геофизических полей при помощи объемных векторных интегральных уравнений. Изд. 2-е. Екатеринбург: УрО РАН. 2000. 88 с.

Косенков О.М. Электромагнитное поле круговой петли на границе земля-воздух. // Изв. АН СССР, серия геофиз. 1963. № 12. С.114-121.

Краев А.П. Основы геоэлектрики. 2-е изд. Л.: Недра. 1965. 587 с.

Краснов М. Л. Интегральные уравнения. (Введение в теорию). М.-Л.: Наука, 1975. 304 с.

Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Начала теории вычислительных методов: Интегральные уравнения, некорректные задачи и улучшение сходимости. Минск: Наука и техника, 1984. 263 с.

Кудрявцев Ю.И. Теория поля и ее применение в геофизике. Л.: Недра, 1988. 335 с.

Курбатов П.А., Аринчин С.А. Численный расчет электромагнитных полей. М.: Энергоатомиздат, 1984. 168 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.2 Теория поля. М.: Наука, 1988. 510 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1957. 623 с.

Лебедкин Л.В., Попов Н.И., Савинова М.И., Шрага А.Б. Скважинная индукционная электроразведка с аппаратурой СИНУС. Л.: Рудгеофизика, 1990. 224 с.

Максвелл Дж. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М.: ГИТТЛ, 1952. 687 с.

Марков Г.Т., Васильев Е.Н. Математические методы прикладной электродинамики. М.: Сов Радио, 1970. 117 с.

Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.-Л.: Энергия, 1967. 376 с.

Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М.: Высш. школа, 1983. 463 с.

Матвеев А.Н. Электродинамика. М.: Высш. школа, 1980. 383 с.

Молочнов Г.В., Балобаев В.Т. Проводящее тело в электромагнитном поле вертикального магнитного диполя. // Уч. записки ЛГУ. Вопросы геофизики. № 249. Вып.10. 1958. С. 24–36.

Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.2. М.: ИЛ, 1960. 896 с.

Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. М.: Атомиздат, 1972. 392 с.

Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 130 с.

Овчинников И.К. Теория поля. М.: Недра, 1979. 352 с.

Парселл Э. Электричество и магнетизм. Берклеевский курс физики. Т.2. 1971. 439 с.

Пеккер И.И. Расчет магнитных систем путем интегрирования по источникам поля. // Изв. ВУЗов. Сер. Электромеханика. 1969. № 6. С.599-606.

Поджо А., Миллер Е. Решение трехмерных задач рассеяния электромагнитных волн с помощью интегральных уравнений // Вычислительные методы в электродинамике. Гл. 4. М.: Мир, 1977. С.177 - 309.

Ратушняк А.Н. Рассеяние гармонического электромагнитного поля на трехмерных объектах. // Геофизика. 2012. № 1. С.61-65.

Ратушняк А.Н. Моделирование рассеяния электромагнитного поля на 3D объектах в непроводящей среде. // Известия ВУЗов. Горный журнал. 2023. № 5. С.79-89.

Ратушняк А.Н., Коноплин А.Д. Об оптимальной частоте при индуктивных методах электроразведки. // Уральский геофизический вестник. 2022. № 1 (47). С.40-47.

Ратушняк А.Н., Коноплин А.Д. Низкочастотная электроразведка с измерениями пространственных инвариантов магнитного поля. // Известия УГГУ. 2023. Вып. 3(71). С. 112–119.

Ратушняк А.Н., Коноплин А.Д. Способ измерения полуосей полного эллипса поляризации магнитного поля и устройство для его осуществления. Патент № 2793393. 03.04.2023. Бюл. № 10.

Савельев И.В. Основы теоретической физики. Т.2. Квантовая механика. М.: Наука, 1977. 352 с.

Светов Б.С. Способ измерения полуосей эллипса поляризации магнитного поля и устройство для его осуществления. А.С. № 132345. БИ №12. 1960.

Светов Б.С. Теория, методика интерпретация материалов низкочастотной индуктивной электроразведки. М.: Недра. 1973. 254 с.

Светов Б.С., Мизюк Л.Я., Поджарый В.М. Рудная электроразведка по методике эллиптически поляризованного поля. М.: Недра, 1969. 136 с.

Светов Б.С., Петровский А.Д., Ершов Е.М., Каменецкий Ф.М., Коваленко

В.Ф., Франтов Г.С., Фролов А.Д., Шауб Ю.Б. Электромагнитные методы разведки в рудной геофизике. М.: Недра, 1966. 308 с.

Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.

Спичак В.В. Магнитотеллурические поля в трехмерных моделях геоэлектрики. М.: Научный мир, 1999. 204 с.

Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.-Л., ОГИЗ, 1948. 541 с.

Табаровский Л.А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск: Наука, 1975. 142 с.

Тамм И.Е. Основы теории электричества. 5-е изд. М.: Гостеортехиздат, 1954. 620 с.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

Тозони О. В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975. 296 с.

Уэйт Дж. Р. Геоэлектромагнетизм. М.: Недра. 1987. 235 с.

Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963. 734 с.

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т 5. Электричество и магнетизм. М.: Мир, 1965. 292 с.

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т.6 Электродинамика. М.: Мир, 1977. 349 с.

Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т.1, М.: Мир, 1978. 547с.

Финкельберг В.М. Диэлектрическая проницаемость смесей. // ЖТФ, т. XXXIV, В.3, 1964, с. 509–518.

Фок В.А., Бурсиан В.Р. Электромагнитное поле переменного тока в цепи с двумя заземлениями// Журнал Русского физико-химического общества. Т.58. Вып.2, 1926. 355-363.

Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.

Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Том 2. М.–Л.: ОНТИ, 1937. 998 с.

Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова Думка. 1986. 280 с.

Человечков А.И., Ратушняк А.Н., Байдиков С.В., Астафьев П.Ф. Аэроэлектроразведка при поисках месторождений проводящих руд. Екатеринбург: УрО РАН, 2012. 78 с.

Якубовский Ю.В. Индуктивные методы электроразведки. М.: Госгеолтехиздат. 1963. 212 с.

Якубовский Ю.В. Электроразведка. М.: Недра. 1980. 384 с.

Якубовский Ю.В., Ляхов Л.Л. Электроразведка. М.: Недра, 1988. 395 с.

Яновский Б.М. Земной магнетизм. Л.: Изд. ЛГУ, 1978. 252 с.

Barthes V., Vasseur H.F. Three-dimensional resistivity modelling by the integrel equation method // Adv. Eur. Geoterm. Res. Proc. 2nd Jnt. Semin. Results EC Geotherm. Energy Res., Strasbourg, 1980. P.854-876.

Dey A., Morrison H.F. Resistivity modelling for arbitrary shaped three-dimensional structures // Geophysics. 1979. V. 44, № 4. P.753 -780.

Georgescu P. Three-dimensional models for resistivity data. // Revue Roumaine la Geologie. Geoph. et Geogr. Ser.Geophysigue. 1977. V.21, №2. P.249-265.

Harrington R.G. Field Computation by Moment Methods. MacMillan. New York, 1968. 230 p.

Hohmann G.W. Three-dimensional induced polarization and electromagnetic modeling. // Geophysics, 1975. V.40. P.309 - 324.

Hvozdara M. Electric and magnetic field in a stratified medium with a 3D conductivity inhomogeneity // Ibid. 1983. Vol.27. P.59-84.

Lee S.K., Kim H.J., Song Y, Morrison F.H., Lee K.H. A New Formulation of Magnetic Field Integral Equation for 3-D EM Modeling. // Second International Symposium on 3-D Electromagnetics. Salt Lake City. UT. 1999.
URL:ttps://escholarship.org/content/qt0sb9d92z/qt0sb9d92z_noSplash_01d029629f7a2f7c834acc3628c8c991.pdf?t=p2atyq

Livesay D.E., Chen K.M. Electromagnetic field induced inside arbitrarily shaped biological bodies // IEEE Tr. MTT, 1974. №22, V.12, P.1273-1280.

March H.W. The field of magnetic dipole in presence of a conducting sphere. // Geophysics. Vol. 18. 1953. P.671–684.

Miller E. K., Poggio A. J. Moment-Method Techniques in Electromagnetics from an Applications Viewpoint // Electromagnetic Scattering. Edited by P.L.E. Uslenghi. New York, Academic Press. 1978. P. 315-358.

Paige C.C., Saunders M.A. ISQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // ACM Trans. Math. Softw. 1982. №8. P.43-71, 195-209.

Raiche A.P. An integral equation to three - dimensional modeling. // Geophis. J. R. A. Soc., 1974. № 36. P.363 - 376.

Weidelt P. Electromagnetic Induction in three-dimensional structures. // J. Geophysics. 1975. V.41. № 1. P.85 - 109.

Xie G, Li J., Lee K.H. New 3-D nonlinear electromagnetic inversion. Intenat. Symp. on Three-Dimensional Electromagnetics, Schlumberger-Doll Research, 1995. Pp. 405-414.URL: https://www.researchgate.net/ publication/249865456_3-D_electromagnetic_modeling_and_nonlinear_inversion

Zhdanov M. S., Varentov I. M., Weaver J. T., Golubev N. G., Krylov V. A. Methods for modeling electromagnetic fields: Results from COMMEMI — The international project on the comparision of modeling methods for electromagnetic induction // J. of Appl. Geophysics. 1997. Vol. 37. P. 133–271.

Оглавление

Введение 3

Глава 1. **Силы, действующие на заряд со стороны электромагнитного поля** 7

1.1 Основные законы электромагнетизма 7

1.2 Импульс магнитной силы. Сила Фарадея и сила Лоренца 12

1.3 Движение заряда в переменном электромагнитном поле 17

Глава 2. **Поляризация локальных объектов** 23

2.1 Стационарные потенциальные поля 23

2.2 Поляризация локального объема постоянным электрическим полем 26

2.3 Вектор поляризации 28

2.4 Вектор-потенциал электрического типа 31

2.5 Магнитное поле постоянного тока 33

2.6 Стационарное электромагнитное поле в неоднородной среде 33

Глава 3. **Квазистационарное электромагнитное поле в однородной среде** 37

3.1 Электромагнитное поле стороннего источника электрического типа. Вектор–потенциал электрического типа 40

3.2 Вектор–потенциал магнитного типа. Электромагнитное поле стороннего источника магнитного типа 47

Глава 4. **Квазистационарное электромагнитное поле в неоднородной среде** 51

4.1 Электромагнитное поле при электрическом возбуждении проводящего 3D объекта. Вектор-потенциал электрического типа аномального тока проводимости 53

4.2 Вектор–потенциал магнитного типа аномального тока индукции. Магнитный момент элементарного проводящего объема 55

4.3 Электромагнитное поле при магнитном возбуждении проводящего 3D объекта 62

4.4 Уравнение рассеяния гармонического электромагнитного поля на проводящем 3D объекте. Анализ уравнения рассеяния электромагнитного поля 63
4.5 Частные случаи уравнения рассеяния. Стационарный режим поля. Рассеяние поля на 3D объекте в непроводящей среде 69
Глава 5. **Система линейных алгебраических уравнений рассеяния гармонического электромагнитного поля на 3D объекте** 71
5.1 Сведение уравнения рассеяния к системе линейных алгебраических уравнений 71
5.2 Регуляризация уравнения рассеяния электромагнитного поля. Проблема дискретизации локального объема 76
5.3 Методы решения СЛАУ 81
Глава 6. **Электромагнитное поле в среде с 3D объектами** 84
6.1 Рассеяние электромагнитного поля на 3D объекте в однородной среде 84
6.2 Сопоставление результатов численного и физического моделирования 103
Глава 7. **Индуктивная электроразведка при изучении неоднородных проводящих сред** 111
7.1 Электромагнитные поля индуктивных источников для полупространства 111
7.2 Тензорная функция Грина для полупространства 125
7.3 Программное обеспечение для математического моделирования рассеяния электромагнитного поля на 3D объекте 138
7.4 Интерпретация материалов низкочастотной аэроэлектроразведки 139
7.5 Оптимальная частота индукционных зондирований 143
7.6 Проектирование новых методов аэроэлектроразведки 154
7.7 Информативные измеряемые параметры в методах индуктивной электроразведки 157
Заключение 170
Приложения 172
Литература 180

Научное издание

Ратушняк Александр Николаевич

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОВОДЯЩИХ 3D ОБЪЕКТАХ

Рекомендовано к изданию
Объединенным ученым советом наук о Земле УрО РАН
и ученым советом Института геофизики УрО РАН

ISBN 978-5-7691-2578-2

Подписано в печать 21.10.2024
Формат бумаги 60x84 1/16. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 11,04. Заказ 19156. Тираж 100 экз.

Отпечатано в ООО Универсальная Типография «Альфа Принт»
620049, г. Екатеринбург, переулок Автоматики, 2ж
Тел.: 8(800)300-16-00
www.alfaprint24.ru